



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

**EGZAMIN MATURALNY 2012**

**MATEMATYKA**

**POZIOM PODSTAWOWY**

**Kryteria oceniania odpowiedzi**

**MAJ 2012**

**Zadanie 1. (0–1)**

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.)	
		Wersja arkusza A	Wersja arkusza B
Modelowanie matematyczne	Wykonanie obliczeń procentowych (III.1.d)	A	D

**Zadanie 2. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych, obliczenie potęgi o wykładniku wymiernym (II.1.g)	B	C
---	--	---	---

**Zadanie 3. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia (II.1.a; 1.g; 2.a)	A	A
---	---	---	---

**Zadanie 4. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie wartości logarytmu (II.1.h)	B	C
---	--	---	---

**Zadanie 5. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do rozwiązania równania typu $ x - a  = b$ (II.1.f)	B	A
---	---	---	---

**Zadanie 6. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie sumy rozwiązań równania kwadratowego (II.3.a)	C	B
---	--	---	---

**Zadanie 7. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Odczytanie z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej jej miejsc zerowych (I.4.j)	A	B
--	--	---	---

**Zadanie 8. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (I.4.g)	A	D
---	---	---	---

**Zadanie 9. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Odczytanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych (I.4.b)	<b>C</b>	<b>D</b>
--	--	----------	----------

**Zadanie 10. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Planowanie i wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych (I.1.a; 6.a)	<b>D</b>	<b>B</b>
--	--	----------	----------

**Zadanie 11. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie definicji do wyznaczenia wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego (II.6.a)	<b>B</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 12. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 13. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 14. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Posłużenie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków (I.7.b)	<b>D</b>	<b>C</b>
--	---	----------	----------

**Zadanie 15. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związku między promieniem koła opisanego na kwadracie i długością jego boku (II.7.c)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 16. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta (I.7.a)	<b>C</b>	<b>B</b>
--	---	----------	----------

**Zadanie 17. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Obliczenie wyrazów ciągu arytmetycznego (III.5.a)	<b>C</b>	<b>B</b>
--------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 18. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Obliczenie wyrazu ciągu określonego wzorem ogólnym (I.5.a)	<b>B</b>	<b>D</b>
--	--	----------	----------

**Zadanie 19. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie objętości sześcianu z wykorzystaniem związków miarowych w sześcianie (II.9.b)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 20. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie wysokości stożka z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych lub własności kwadratu (II.9.b)	<b>A</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 21. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wskazanie równania prostej równoległej do danej (I.8.c)	<b>A</b>	<b>B</b>
--	---	----------	----------

**Zadanie 22. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia układu współrzędnych na płaszczyźnie (II.8.a)	<b>A</b>	<b>D</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 23. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zbadanie czy dany punkt spełnia równanie okręgu (II.8.g)	<b>B</b>	<b>D</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 24. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zliczenie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie zasady mnożenia (II.10.b)	<b>C</b>	<b>B</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 25. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie średniej arytmetycznej i interpretowanie tego parametru w kontekście praktycznym (II.10.a)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 26. (0–2)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)
---	--

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = -5, x_2 = -3$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy  $x^2 + 8x + 15$  na czynniki liniowe i zapisze nierówność  $(x + 3)(x + 5) > 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,  
np.  $x_1 = 3, x_2 = 5, x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$

albo

- doprowadzi nierówność do postaci  $|x + 4| > 1$  (na przykład z postaci  $(x + 4)^2 - 1 > 0$  otrzymuje  $(x + 4)^2 > 1$ , a następnie  $|x + 4| > 1$ ) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$

albo

- $x < -5$  lub  $x > -3$

albo

- $x < -5, x > -3$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = -5, x_2 = -3$  i zapisze, np.  $x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$  popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(-\infty, -3) \cup (-5, \infty)$ , to przyznajemy **2 punkty**.

**Zadania 27. (0–2)**

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)
----------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Aby wykazać prawdziwość podanej nierówności, przekształcimy ją najpierw do prostszej postaci równoważnej. Rozpoczynamy od podanej nierówności:

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez 6:

$$2(a+b+c) > 3(a+b)$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2c > a+b$$

Uzyskana nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej, zatem wystarczy wykazać jej prawdziwość. Z założenia wiemy, że  $c > a$  oraz  $c > b$ . Wobec tego

$$2c = c + c > a + b$$

Co należało wykazać.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

jeśli przekształci podaną nierówność do postaci  $2c > a+b$  lub  $(c-a)+(c-b) > 0$ ,

lub  $\frac{-a-b+2c}{6} > 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

jeśli przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

**II sposób rozwiązania**

Zdający prowadzi ciąg nierówności, wychodząc od jednej ze stron podanej nierówności i na końcu dochodząc do drugiej.

Założenie:  $0 < a < b < c$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c > \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}b > \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

jeśli co najmniej jedna z nierówności występująca w zapisanym ciągu nierówności wynika w sposób poprawny z podanych założeń, ale zdający nie podaje kompletnego dowodu wyjściowej nierówności.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

jeśli poda kompletny dowód podanej nierówności.

**Zadanie 28. (0–2)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (II.3.d)
---	--

**Uwaga**

Gdy zdający poda poprawną odpowiedź (trzeci pierwiastek wielomianu:  $x = -3$ ) nie wykonując żadnych obliczeń, to otrzymuje **1 punkt**.

**I sposób rozwiązania**

Przedstawiamy wielomian  $W(x)$  w postaci  $W(x) = (x+4)(x-3)(x-a)$ , gdzie  $a$  oznacza trzeci pierwiastek wielomianu.

$$\text{Stąd } W(x) = x^3 + x^2 - ax^2 - 12x - ax + 12a = x^3 + (1-a)x^2 + (-12-a)x + 12a,$$

Porównując współczynniki wielomianu  $W(x)$  otrzymujemy

$$\begin{cases} 1-a = 4 \\ -12-a = -9 \\ 12a = -36 \end{cases}$$

Stąd  $a = -3$ .

Trzecim pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  jest liczba  $x = -3$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy przedstawi wielomian  $W(x)$  w postaci  $W(x) = (x+4)(x-3)(x-a)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu:  $x = -3$ .

**II sposób rozwiązania**

Przedstawiamy wielomian  $W(x)$  w postaci iloczynu:

$$W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = x^2(x+4) - 9(x+4) = (x+4)(x-3)(x+3).$$

Pierwiastkami wielomianu  $W(x)$  są zatem

$$x_1 = -4, x_2 = 3 \text{ oraz } x_3 = -3.$$

Odpowiedź: Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba  $x = -3$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy przedstawi wielomian w postaci iloczynu, np.:

$$W(x) = (x^2 - 9)(x+4) \text{ lub } W(x) = (x+4)(x-3)(x+3) \text{ lub } W(x) = (x^2 + x - 12)(x+3)$$

lub  $W(x) = (x^2 + 7x + 12)(x-3)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu:  $x = -3$ .

**III sposób rozwiązania**

Liczba  $-4$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ , więc wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $(x+4)$ .

Dzielimy wielomian  $W(x)$  przez dwumian

$$(x+4)$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad -9 \\ \hline (x^3 + 4x^2 - 9x - 36) : (x+4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 4x^2 \\ \hline -9x - 36 \\ \quad 9x + 36 \\ \quad \hline \quad = \quad = \end{array}$$

Wielomian  $W(x)$  zapisujemy w postaci

$$W(x) = (x+4)(x^2 - 9),$$

$$\text{stad } W(x) = (x+4)(x-3)(x+3).$$

Liczba  $3$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ , więc wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $(x-3)$ .

Dzielimy wielomian  $W(x)$  przez dwumian

$$(x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \\ \hline (x^3 + 4x^2 - 9x - 36) : (x-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 \\ \hline 7x^2 - 9x \\ \quad -7x^2 + 21x \\ \quad \hline \quad 12x - 36 \\ \quad \quad -12x + 36 \\ \quad \quad \hline \quad \quad = \quad = \end{array}$$

Wielomian  $W(x)$  zapisujemy w postaci

$$W(x) = (x^2 + 7x + 12)(x-3).$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu

$$x^2 + 7x + 12: x = -4 \text{ i } x = -3.$$

Liczby  $3$  i  $-4$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$ , więc wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez  $(x-3)(x+4) = (x^2 + x - 12)$ .

Dzielimy wielomian  $W(x)$  przez

$$(x^2 + x - 12)$$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \hline (x^3 + 4x^2 - 9x - 36) : (x^2 + x - 12) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 12x \\ \hline 3x^2 + 3x - 36 \\ \quad -3x^2 - 3x + 36 \\ \quad \hline \quad = \quad = \quad = \end{array}$$

Zatem

$$W(x) = (x^2 + x - 12)(x+3) = (x-3)(x+4)(x+3).$$

Zatem pierwiastkami wielomianu są:  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 3$  oraz  $x_3 = -3$ .

Odpowiedź: Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba  $x = -3$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy:

- wykona dzielenie wielomianu przez dwumian  $(x+4)$ , otrzyma iloraz  $(x^2-9)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- wykona dzielenie wielomianu przez dwumian  $(x-3)$ , otrzyma iloraz  $(x^2+7x+12)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- wykona dzielenie wielomianu przez  $(x^2+x-12)$ , otrzyma iloraz  $(x+3)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- wykona dzielenie wielomianu przez  $(x+4)$  lub  $(x-3)$ , lub przez  $(x^2+x-12)$  popełniając błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznacza pierwiastki otrzymanego ilorazu.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu:  $x = -3$ .

**Uwaga**

Dzieląc wielomian  $W(x)$  przez dwumian  $(x-p)$  zdający może posłużyć się schematem Hornera, np. przy dzieleniu przez  $(x+4)$  otrzymuje

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -9 & -36 \\ -4 & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

**IV sposób rozwiązania**

Korzystamy z jednego ze wzorów Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego i otrzymujemy

$$(-4) \cdot 3 \cdot x_3 = -\frac{-36}{1}, \text{ stąd } x_3 = -3$$

lub

$$(-4) + 3 + x_3 = -\frac{4}{1}, \text{ stąd } x_3 = -3,$$

lub

$$(-4) \cdot 3 + (-4) \cdot x_3 + 3 \cdot x_3 = \frac{-9}{1}.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że rzeczywiście  $W(-3) = 0$

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy poprawnie zastosuje jeden ze wzorów Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy poprawnie obliczy trzeci pierwiastek:  $x = -3$ .

**Zadania 29. (0–2)**

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie własności symetralnej odcinka do wyznaczenia jej równania (IV.8.b, 8.c, 8.e)
------------------------------	--

**I sposób rozwiązania**

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $\frac{10-2}{2-(-2)}=2$ . Zatem współczynnik

kierunkowy prostej prostopadłej do prostej  $AB$  jest równy  $\left(-\frac{1}{2}\right)$ . Symetralna odcinka  $AB$

ma równanie  $y = -\frac{1}{2}x + b$ . Punkt  $S = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+10}{2}\right) = (0, 6)$  jest środkiem odcinka  $AB$ .

Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt  $S$ , więc  $6 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b$ . Stąd  $b = 6$ , a więc

symetralna odcinka  $AB$  ma równanie  $y = -\frac{1}{2}x + 6$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

- gdy poprawnie wyznaczy lub poda współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $S = (0, 6)$  oraz współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a = 2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- gdy popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu współrzędnych środka odcinka albo współczynnika kierunkowego prostej  $AB$  i konsekwentnie wyznaczy równanie symetralnej

albo

- gdy obliczy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a = 2$  oraz współczynnik kierunkowy prostej do niej prostopadłej  $a_1 = -\frac{1}{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy wyznaczy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $y = -\frac{1}{2}x + 6$  lub  $x + 2y - 12 = 0$ .

**II sposób rozwiązania**

Obliczamy współrzędne środka odcinka  $AB$ :  $S = (0, 6)$ . Obliczamy współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB} = [4, 8]$ . Ponieważ symetralna odcinka  $AB$  jest prostopadła do wektora  $\overrightarrow{AB}$  i przechodzi przez punkt  $S$ , więc jej równanie ma postać  $4(x-0) + 8(y-6) = 0$ , czyli  $x + 2y - 12 = 0$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

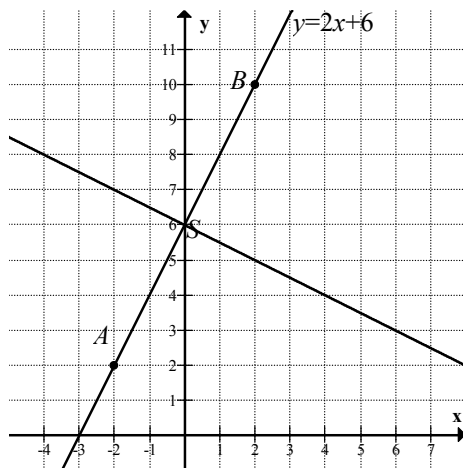
gdy wyznaczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB} = [4, 8]$  oraz środek odcinka  $AB$ :  $S = (0, 6)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy poprawnie wyznaczy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $x + 2y - 12 = 0$  lub

$$y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

### III sposób rozwiązania

Z rysunku w układzie współrzędnych



odczytujemy współrzędne punktu  $S = (0,6)$ , współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka  $AB$ :  $a = -\frac{1}{2}$  i zapisujemy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $y = -\frac{1}{2}x + 6$ .

### Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy odczyta, z dokładnie sporządzonego rysunku w układzie współrzędnych, współrzędne środka odcinka  $AB$  i współczynnik kierunkowy symetralnej prostej  $AB$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy zapisze równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $x + 2y - 12 = 0$  lub  $y = -\frac{1}{2}x + 6$ .

### IV sposób rozwiązania

Korzystamy z tego, że symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów równo oddalonych od jego końców. Jeśli punkt  $P = (x, y)$  leży na symetralnej, to  $|AP| = |BP|$ .

Zatem  $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-10)^2}$ , czyli  $(x+2)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-10)^2$ .

Po uporządkowaniu równania i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy  $x + 2y - 12 = 0$ .

### Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy zapisze równanie  $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-10)^2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy wyznaczy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $x + 2y - 12 = 0$  lub  $y = -\frac{1}{2}x + 6$ .

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający przepisze z błędem współrzędne punktów i wyznaczy konsekwentnie równanie symetralnej odcinka  $AB$ , to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

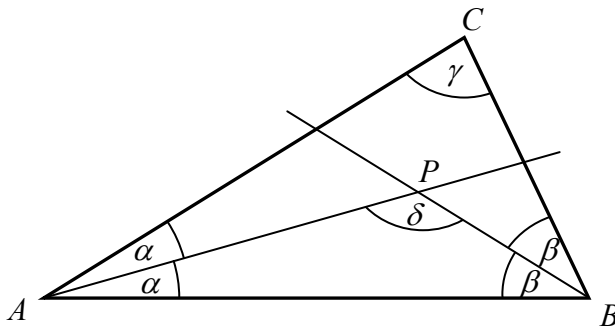
**Zadanie 30. (0–2)**

Rozumowanie i argumentacja

Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (V.7.c)

**I sposób rozwiązania**

Niech  $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$ ,  $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$ ,  $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ ,  $|\sphericalangle APB| = \delta$ .



Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie równa jest  $180^\circ$ , więc w trójkącie  $ABC$  mamy  $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$ .

Ponieważ  $\gamma > 0^\circ$ , więc  $2\alpha + 2\beta < 180^\circ$ , stąd  $\alpha + \beta < 90^\circ$ .

W trójkącie  $ABP$  mamy  $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$ .

Stąd i z otrzymanej nierówności  $\alpha + \beta < 90^\circ$  wynika, że  $\delta > 90^\circ$ .

Oznacza to, że kąt  $APB$  jest kątem rozwartym.

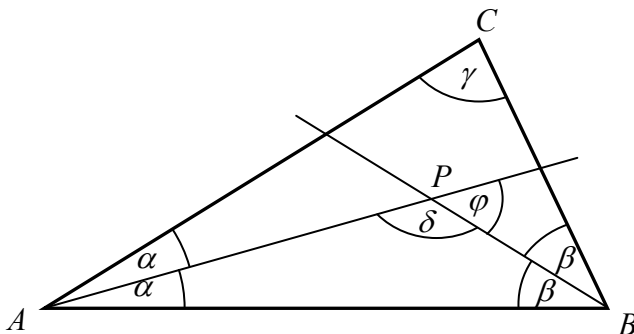
Co należało uzasadnić.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że kąt  $APB$  jest kątem rozwartym.

**II sposób rozwiązania**

Niech  $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$ ,  $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$ ,  $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ ,  $|\sphericalangle APB| = \delta$ .



Ponieważ  $\delta + \varphi = 180^\circ$  oraz suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie  $ABP$  jest równa  $180^\circ$ , więc otrzymujemy

$$\varphi = 180^\circ - \delta = \alpha + \beta = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) < \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Ponieważ  $\varphi < 90^\circ$ , więc  $\varphi$  jest kątem ostrym, zatem  $\delta$  jest kątem rozwartym. Oznacza to, że kąt  $APB$  jest kątem rozwartym. Co należało uzasadnić.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że kąt  $APB$  jest rozwarty.

**Zadanie 31. (0–2)**

Modelowanie matematyczne	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (III.10.b;10.d)
--------------------------	---

**I sposób rozwiązania** (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane  $(x, y)$  dwóch liczb ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$ .

Iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6, gdy:

- jedna z tych liczb jest równa 6 (wówczas druga jest dowolna)
- albo
- jedną z liczb jest 3, a drugą jest 2 lub 4.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  jest więc równa

$$|A| = (2 \cdot 7 - 1) + 2 \cdot 2 = 17.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe:  $P(A) = \frac{17}{49}$ .

**II sposób rozwiązania** (metoda tabeli)

	1	2	3	4	5	6	7
1						☺	
2			☺			☺	
3		☺		☺		☺	
4			☺			☺	
5						☺	
6	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
7						☺	

Symbole w tabeli oznaczają odpowiednio:

☺ - zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$

$$|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49 \quad \text{ i } \quad |A| = 17, \quad \text{zatem} \quad P(A) = \frac{17}{49}.$$

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt  
gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo

- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 17$ .

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

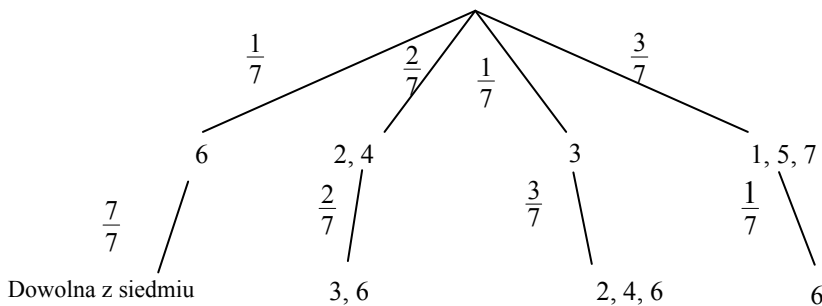
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{17}{49}$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie 0 punktów.

**III sposób rozwiązania (metoda drzewa)**

Drzewo z istotnymi gałęziami:



Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  (iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6) jest więc równe:  $P(A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{17}{49}$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt  
gdy:

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opíše prawdopodobieństwo

albo

- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{17}{49}$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie 0 punktów.

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo i błędnie skróci ułamek,

np.  $P(A) = \frac{17}{49} = \frac{1}{3}$ , to otrzymuje 2 punkty.

**Zadanie 32. (0–4)**

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego (III.5.c)
--------------------------	--

**I sposób rozwiązania**

Ciąg  $(9, x, 19)$  jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:  $x = \frac{9+19}{2} = 14$ .

Wiemy, że ciąg  $(14, 42, y, z)$  jest geometryczny, zatem jego iloraz jest równy  $q = \frac{42}{14} = 3$ .

Wobec tego  $y = 3 \cdot 42 = 126$  i  $z = 126 \cdot 3 = 378$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np.  $x = \frac{9+19}{2}$  lub  $2x = 9 + 19$  lub  $x = 14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np.  $42^2 = xy$  lub  $y^2 = 42z$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego  $q = 3$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie  $x = 14$ ,  $y = 126$ ,  $z = 378$ .

**II sposób rozwiązania**

Ciąg  $(9, x, 19)$  jest arytmetyczny, zatem  $2x = 9 + 19$ ,  $x = 14$ .

Ciąg  $(14, 42, y, z)$  jest geometryczny, zatem  $42^2 = 14 \cdot y$  i  $y^2 = 42 \cdot z$ ,

$y = \frac{1764}{14} = 126$  i  $126^2 = 42 \cdot z$ , stąd  $z = 378$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np.  $x = \frac{9+19}{2}$  lub  $2x = 9 + 19$ , lub  $x = 14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np.  $42^2 = xy$  lub  $y^2 = 42z$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie  $x = 14$  i zapisanie równania  $42^2 = 14y$  lub  $1764 = 14y$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie  $y = 126$  i zapisanie równania  $y^2 = 42z$  lub  $126^2 = 42z$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pktObliczenie  $x = 14$ ,  $y = 126$ ,  $z = 378$ .**Uwaga**Jeśli zdający pomyli własności ciągów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.**Zadanie 33. (0–4)**

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie objętości wielościanu (IV.9.b)
------------------------------	---

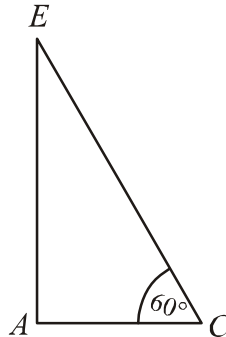
Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów:

- obliczenie wysokości  $AE$  ostrosłupa,
- obliczenie pola podstawy tego ostrosłupa,
- obliczenie objętości ostrosłupa.

**Rozwiązanie****a) Obliczenie pola podstawy ostrosłupa**

Podstawa  $ABCD$  ostrosłupa jest kwadratem o boku  $AB$ . Stosując wzór na przekątną kwadratu, mamy:  $4 = |AB|\sqrt{2}$ , stąd  $|AB| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ .

Obliczamy pole  $P$  podstawy ostrosłupa:  $P = (2\sqrt{2})^2 = 8$ .

**b) Obliczenie wysokości  $AE$  ostrosłupa**Rysujemy trójkąt  $EAC$ .

$$|AE| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

**c) Obliczenie objętości ostrosłupa**

Objętość ostrosłupa jest równa  $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Obliczenie wysokości  $AE$  ostrosłupa:  $|AE| = 4\sqrt{3}$  albo obliczenie pola  $P$  podstawy ostrosłupa:

$$P = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Obliczenie pola podstawy i wysokości ostrosłupa.

**Uwaga**

Jeśli zdający obliczy jedną z tych wielkości z błędem rachunkowym, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie pełne** ..... **4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}$ .

**Uwaga**

Jeśli zdający pominie współczynnik  $\frac{1}{3}$  we wzorze na objętość ostrosłupa, ale rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca z tym jednym błędem, to za takie rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Nie obniżamy punktacji zadania za błędy nieuwagi, np. gdy zdający poprawnie obliczył wysokość ostrosłupa, ale przy obliczaniu objętości ostrosłupa podstawiał błędna wartość.

**Zadanie 34. (0–5)**

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)
--------------------------	--

**I sposób rozwiązania**

Przyjmujemy oznaczenia np.:  $t$  – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy,  $v$  – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę.

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla pociągu pospiesznego:  $(t - 1) \cdot (v + 24) = 210$

Następnie zapisujemy układ równań  $\begin{cases} t \cdot v = 210 \\ (t - 1) \cdot (v + 24) = 210 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$(t - 1) \cdot \left( \frac{210}{t} + 24 \right) = 210$$

$$210 + 24t - \frac{210}{t} - 24 = 210$$

$$24t^2 - 24t - 210 = 0$$

$$4t^2 - 4t - 35 = 0$$

$$\Delta = 16 + 560 = 24^2$$

$$t_1 = \frac{4 - 24}{8} = -\frac{5}{2}, \quad t_2 = \frac{4 + 24}{8} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$t_1$  jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg pospieszny:  $3,5 - 1 = 2,5$ .

Odp. Czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny.

**II sposób rozwiązania**

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla pociągu pospiesznego:  $(t-1) \cdot (v+24) = 210$

Następnie zapisujemy układ równań 
$$\begin{cases} t \cdot v = 210 \\ (t-1) \cdot (v+24) = 210 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(\frac{210}{v} - 1\right) \cdot (v+24) = 210$$

$$210 + \frac{5040}{v} - v - 24 = 210$$

$$\frac{5040}{v} - v - 24 = 0$$

$$-v^2 - 24v + 5040 = 0$$

$$\Delta = 576 + 20160 = 144^2$$

$$v_1 = \frac{24 - 144}{-2} = 60, \quad v_2 = \frac{24 + 144}{-2} = -84,$$

$v_2$  jest sprzeczne z warunkami zadania.

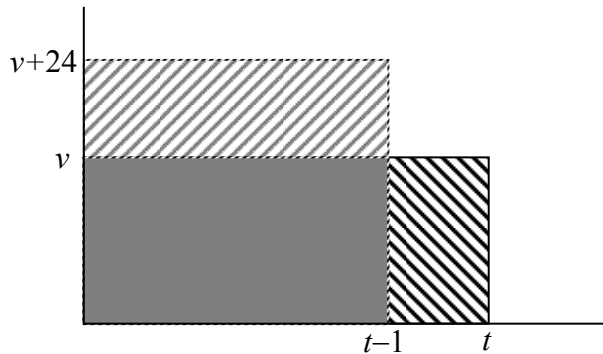
Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg osobowy:  $t = \frac{210}{v} = \frac{210}{60} = \frac{7}{2} = 3,5$ .

Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg pospieszny:  $3,5 - 1 = 2,5$ .

Odp. Czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny.

**III sposób rozwiązania**

Przyjmujemy oznaczenia np.:  $t$  – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy,  $v$  – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę.



Narysowane duże prostokąty reprezentują odległości przebyte przez obydwie pociągi, mają zatem równe pola. Wobec tego pola zakreskowanych prostokątów są równe. Stąd równość  $24(t-1) = 1 \cdot v$ . Droga przebyta przez pociąg osobowy wyraża się wzorem  $v \cdot t = 24(t-1) \cdot t$ .

Ponieważ trasa pociągu ma długość 210 km, otrzymujemy równanie  $24(t-1) \cdot t = 210$ .

$$\text{Stąd } 24t^2 - 24t - 210 = 0$$

$$4t^2 - 4t - 35 = 0$$

$$\Delta = 16 + 560 = 24^2$$

$$t_1 = \frac{4 - 24}{8} = -\frac{5}{2}, \quad t_2 = \frac{4 + 24}{8} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$t_1$  jest sprzeczne z warunkami zadania. Zatem pociąg osobowy jechał przez 3,5 godziny, a pociąg pospieszny:  $3,5 - 1 = 2,5$  godziny.

Odp. Czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny.

### **Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$$(t-1)(v+24) = 210$$

gdy  $t$  oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, a  $v$  średnią prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę,  
lub

$$(t+1)(v-24) = 210$$

gdy  $t$  oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg pospieszny, a  $v$  średnią prędkość pociągu pospiesznego w kilometrach na godzinę.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$ , np.:

$$\begin{cases} t \cdot v = 210 \\ (t-1) \cdot (v+24) = 210 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} t \cdot v = 210 \\ (t+1) \cdot (v-24) = 210 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $v$  lub  $t$ , np.:

$$(t-1) \cdot \left( \frac{210}{t} + 24 \right) = 210 \quad \text{lub} \quad \left( \frac{210}{v} - 1 \right) \cdot (v+24) = 210 \quad \text{lub} \quad 24(t-1) \cdot t = 210$$

### **Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki** ..... 2 pkt

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $v$  lub  $t$  z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie czasu pokonania drogi przez pociąg pospieszny

albo

- obliczenie czasu jazdy pociągu osobowego:  $t = 3,5$  i nie obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny: 2,5 godziny.

### **Uwagi**

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie czas jazdy pociągu pospiesznego i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki****Przykład 1.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość pociągu osobowego,  $t$  - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v + 24 = \frac{210}{t-1}$$

$$\begin{cases} 210 = v \cdot t \\ 210 = (v + 24)t - 1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia  $t-1$  w nawias. Zapis równania  $v + 24 = \frac{210}{t-1}$  wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

**Przykład 2.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość pociągu osobowego,  $t$  - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v + 24 = \frac{210}{t-1} \quad \begin{cases} v = \frac{210}{t} \\ v + 24 = \frac{210}{t-1} \end{cases} \quad \frac{120}{t} + 24 = \frac{210}{t-1}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu  $\frac{120}{t} + 24 = \frac{210}{t-1}$  zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 210 i pominął liczbę 1 w mianowniku ułamka.

**Przykład 3.**

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np.  $4t^2 + 4t - 35 = 0$  zamiast równania  $4t^2 - 4t - 35 = 0$  (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realnym czasem jazdy pociągu pospiesznego, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.