

Materiał ćwiczeniowy z matematyki
Marzec 2012

Klucz punktowania do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania do zadań otwartych

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz punktowania do zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Odp.	D	B	A	C	B	B	A	A	D	C	C	D	C	A	A	A	C	B	B	B	D

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 22. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 3x + 36 \geq 0$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:

I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-3x^2 + 3x + 36$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 9 + 432 = 441 \text{ i stąd } x_1 = \frac{-3 - 21}{-6} = 4, \quad x_2 = \frac{-3 + 21}{-6} = -3$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = -12 \text{ i stąd } x_1 = 4 \text{ oraz } x_2 = -3$$

albo

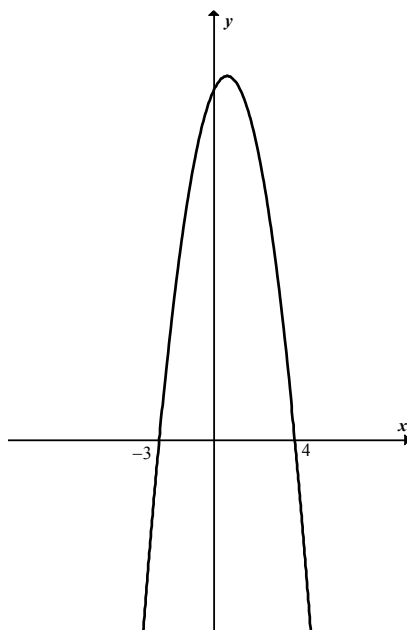
- podajemy je bezpośrednio (explicite lub zapisując postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie)

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3$$

lub

$$-3(x-4)(x+3) \geq 0$$

lub



II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego

$$-3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{147}{4} \geq 0$$

a następnie

- przekształcamy nierówność, tak by jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej

$$-3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right] \geq 0$$

$$-3\left(x - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) \geq 0$$

$$-3(x - 4) \cdot (x + 3) \geq 0$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $\langle -3, 4 \rangle$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x = 4$, $x = -3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -3x^2 + 3x + 36$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
 - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-3(x - 4) \cdot (x + 3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność
- realizując pierwszy etap, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
 - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność
 - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = -1$ i $x_1 \cdot x_2 = -12$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy:

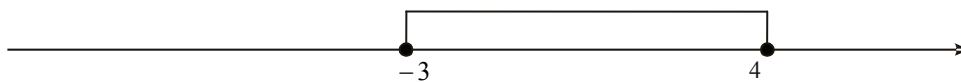
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -3, 4 \rangle$ lub $x \in \langle -3, 4 \rangle$ lub $-3 \leq x \leq 4$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -3$, $x \leq 4$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -3$ i $x_2 = 4$ i zapisze $x \in \langle 3, 4 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli błąd zdającego w obliczeniu pierwiastków trójmianu nie wynika z wykonywanych przez niego czynności (zdający rozwiązuje „swoje zadanie”), to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

Zadanie 23. (2 pkt)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-b}{x-9}$ dla $x \neq 9$. Ponadto wiemy, że $f(4) = -1$.

Oblicz współczynnik b .

Rozwiązanie

Warunek $f(4) = -1$ zapisujemy w postaci równania z niewiadomą b : $-1 = \frac{2 \cdot 4 - b}{4 - 9}$.

Rozwiązujemy to równanie i obliczamy współczynnik b : $b = 3$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 pkt**

gdy poprawnie zapisze równanie z niewiadomą b , np. $-1 = \frac{2 \cdot 4 - b}{4 - 9}$.

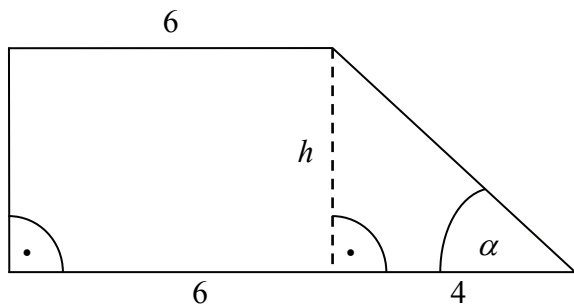
Zdający otrzymuje **2 pkt**

gdy obliczy współczynnik $b = 3$.

Zadanie 24. (2 pkt)

Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10 oraz tangens kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole tego trapezu.

Rozwiązanie



Obliczamy wysokość trapezu h , korzystając z faktu, że tangens kąta ostrego jest równy 3:

$$\frac{h}{4} = 3, \text{ stąd } h = 12.$$

Zatem pole trapezu jest równe

$$\frac{(6+10) \cdot 12}{2} = 96.$$

Schemat oceniania

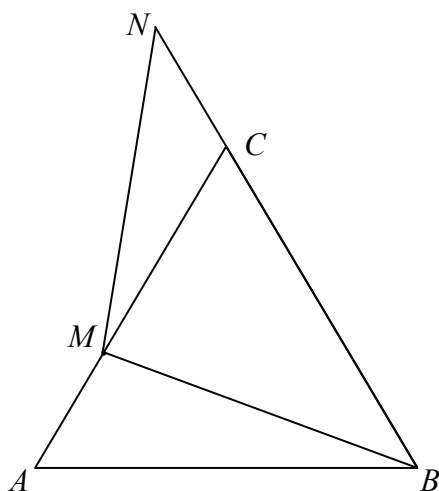
Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- obliczy wysokość trapezu $h = 12$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy pole
- albo
- obliczy wysokość trapezu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu.

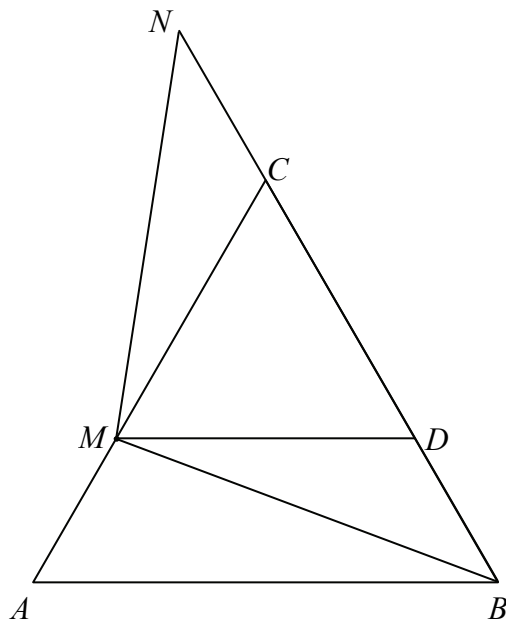
Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poprawnie obliczy pole trapezu $P = 96$.

Zadanie 25. (2 pkt)

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.



I sposób rozwiązania



Rysujemy odcinek MD równoległy do odcinka AB .

Uzasadniamy, że trójkąty BDM i MCN są przystające na podstawie cechy bkb :

- $|BD| = |CN|$, bo $|BD| = |AM|$
- $|MD| = |CM|$, bo trójkąt MDC jest równoboczny
- $|\sphericalangle BDM| = 120^\circ = |\sphericalangle NCM|$

Zatem $|BM| = |MN|$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy napisze, że trójkąty BDM i MCN są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty BDM i MCN są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$.

Uwaga

Zdający może też dorysować odcinek $MD \parallel BC$ i analogicznie pokazać, że trójkąty BMD i MNC są przystające.

II sposób rozwiązania

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABM obliczamy $|BM|^2$:

$$|BM|^2 = |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM| \cdot |AB| \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM| \cdot |AB| \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= |AM|^2 + |AB|^2 - |AM| \cdot |AB|.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta $M CN$ obliczamy $|MN|^2$:

$$|MN|^2 = |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC| \cdot |CN| \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC| \cdot |CN| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= |MC|^2 + |CN|^2 + |MC| \cdot |CN|$$

Ponieważ $|AM| = |CN|$ i $|MC| = |AB| - |AM|$, więc

$$|MN|^2 = (|AB| - |AM|)^2 + |AM|^2 + (|AB| - |AM|) \cdot |AM| =$$

$$= |AB|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AM| + |AM|^2 + |AB| \cdot |AM| - |AM|^2 = |AB|^2 + |AM|^2 - |AB| \cdot |AM|.$$

Zatem $|BM|^2 = |MN|^2$, czyli $|BM| = |MN|$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy korzystając z twierdzenia cosinusów, obliczy kwadraty długości odcinków BM i MN .

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poprawnie uzasadni, że $|BM| = |MN|$.

Zadanie 26. (2 pkt)

Liczby $64, x, 4$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

I sposób rozwiązania

Korzystając ze wzoru na trzeci wyraz ciągu geometrycznego obliczamy q iloraz ciągu:

$$4 = 64 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{16}$$

$$q = -\frac{1}{4} \text{ lub } q = \frac{1}{4}.$$

Ponieważ ciąg jest malejący, to $q = \frac{1}{4}$.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: $64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}$, zatem piąty wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{4}$.

II sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego wynika, że $x^2 = 64 \cdot 4$. Stąd $x^2 = 256$, czyli $x = 16$ lub $x = -16$. Ponieważ ciąg geometryczny jest malejący, to $x = 16$, a iloraz tego ciągu q jest równy $\frac{1}{4}$. Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: $64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}$, zatem piąty wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{4}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć piąty wyraz ciągu korzystając ze wzoru: $64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{4^3}{4^4} = \frac{1}{4}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy obliczy iloraz ciągu: $q = \frac{1}{4}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy piąty wyraz ciągu: $\frac{1}{4}$

Zadanie 27. (2 pkt)

Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie

Liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ przedstawiamy w postaci

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 3^n - 2^n = 3^n(9+1) - 2^n(4+1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} =$$
$$= 10(3^n - 2^{n-1}) = 10k, \text{ gdzie } k = 3^n - 2^{n-1} \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Zatem liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zapisze liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ w postaci $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ i nie uzasadni, że liczba $2^n \cdot 5$ jest podzielna przez 10.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie, np.:

- przekształci liczbę $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ do postaci $10(3^n - 2^{n-1}) = 10k$, gdzie $k = 3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą

albo

- przekształci liczbę $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ do postaci $10(3^n - 2^{n-1})$ i zapisze, że $3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą

albo

- zapisze liczbę w postaci $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ i uzasadni, że jest podzielna przez 10.

Uwaga

Jeśli zdający zapisuje kolejno:

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10x$$

$$3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 10x$$

$$10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10x$$

$$5(2 \cdot 3^n - 2^n) = 10x$$

$$2 \cdot 3^n - 2^n = 2x$$

i uzasadnia, że $2 \cdot 3^n - 2^n$ jest liczbą podzielną przez 2, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 28. (2 pkt)

Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów klasy III.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	9	2

Oblicz średnią arytmetyczną i kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen.

Rozwiązanie

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III:

$$\frac{6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 2}{25} = \frac{75}{25} = 3.$$

Obliczamy kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1 \cdot (6-3)^2 + 2 \cdot (5-3)^2 + 6 \cdot (4-3)^2 + 5 \cdot (3-3)^2 + 9 \cdot (2-3)^2 + 2 \cdot (1-3)^2}{25} = \\ &= \frac{1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{25} = \frac{9 + 8 + 6 + 0 + 9 + 8}{25} = \frac{40}{25} = 1,6 \end{aligned}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje..... 1 pkt
gdy

- obliczy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

lub

- obliczy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III z błędem rachunkowym i konsekwentnie do tego obliczy kwadrat odchylenia standardowego.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy średnią arytmetyczną i kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen: odpowiednio 3 i 1,6.

Zadanie 29. (2 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w drugim rzucie jest o 1 większa od liczby oczek w pierwszym rzucie.

I sposób rozwiązania

Ω jest zbiorem wszystkich par (a, b) takich, że $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mamy model klasyczny, w którym $|\Omega| = 36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$

Zatem $|A| = 5$ i stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$.

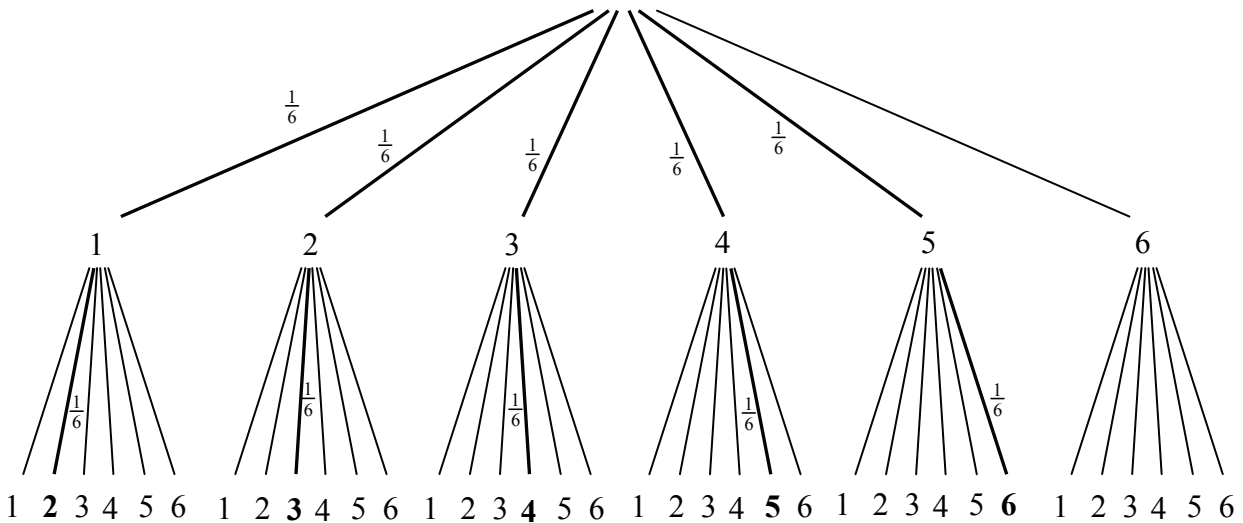
Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $A = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{36}$.

II sposób rozwiązania: metoda drzewa

Rysujemy drzewo i pogrubiamy istotne dla rozwiązania zadania gałęzie tego drzewa. Zapisujemy prawdopodobieństwa tylko na tych gałęziach.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach)

albo

- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i nie wskazuje na drzewie odpowiednich gałęzi, ale z dalszych obliczeń można wywnioskować, że wybiera właściwe gałęzie.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{36}$.

III sposób rozwiązania: metoda tabeli

Rysujemy tabelę i wybieramy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

		II kostka					
		1	2	3	4	5	6
I kostka	1		X				
	2			X			
	3				X		
	4					X	
	5						X
	6						

$|\Omega| = 36$ i $|A| = 5$, zatem $P(A) = \frac{5}{36}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

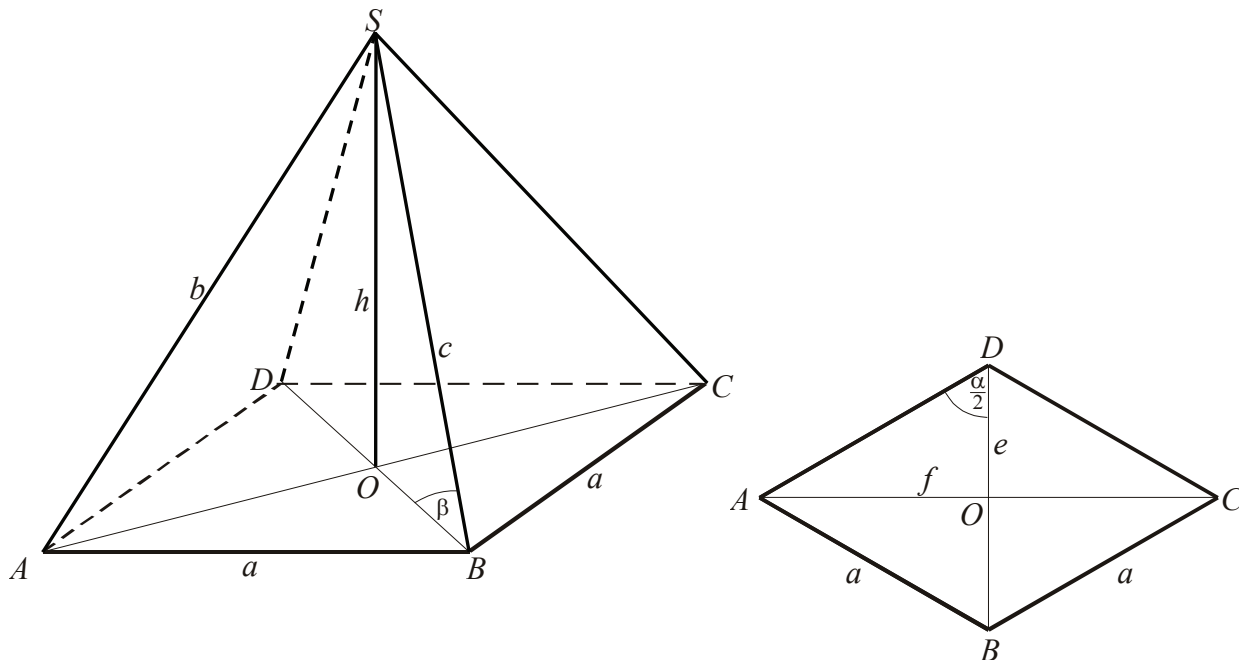
Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy narysuje tabelę i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające lub zaznaczy je w tabeli.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poda poprawną odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{36}$.

Zadanie 30. (4 pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest romb $ABCD$ o boku długości 4. Kąt ABC rombu ma miarę 120° oraz $|AS|=|CS|=10$ i $|BS|=|DS|$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi BS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

I sposób rozwiązania



Wprowadźmy oznaczenia:

a – długość boku rombu

e, f – długości przekątnych rombu

h – wysokość ostrosłupa

$b = |AS| = |CS|$

$c = |BS| = |DS|$.

Obliczamy długości przekątnych podstawy. Ponieważ $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$, to trójkąt ABD jest równoboczny. Zatem mamy:

$$e = |BD| = a \text{ i } \frac{f}{2} = |OC| = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{stad } e = 4, \quad \frac{f}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS , obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 10^2 - (2\sqrt{3})^2 = 88$$

$$h = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Obliczamy długość krawędzi bocznej BS :

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = 88 + 4$$

$$c = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$$

Obliczamy sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej BS ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\sin \beta = \frac{h}{c} = \frac{2\sqrt{22}}{2\sqrt{23}} = \sqrt{\frac{22}{23}} = \frac{\sqrt{506}}{23}$$

$$\sin \beta \approx 0,9780.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$ (lub $\frac{e}{2} = 2$

i $\frac{f}{2} = 2\sqrt{3}$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $h = 2\sqrt{22}$.

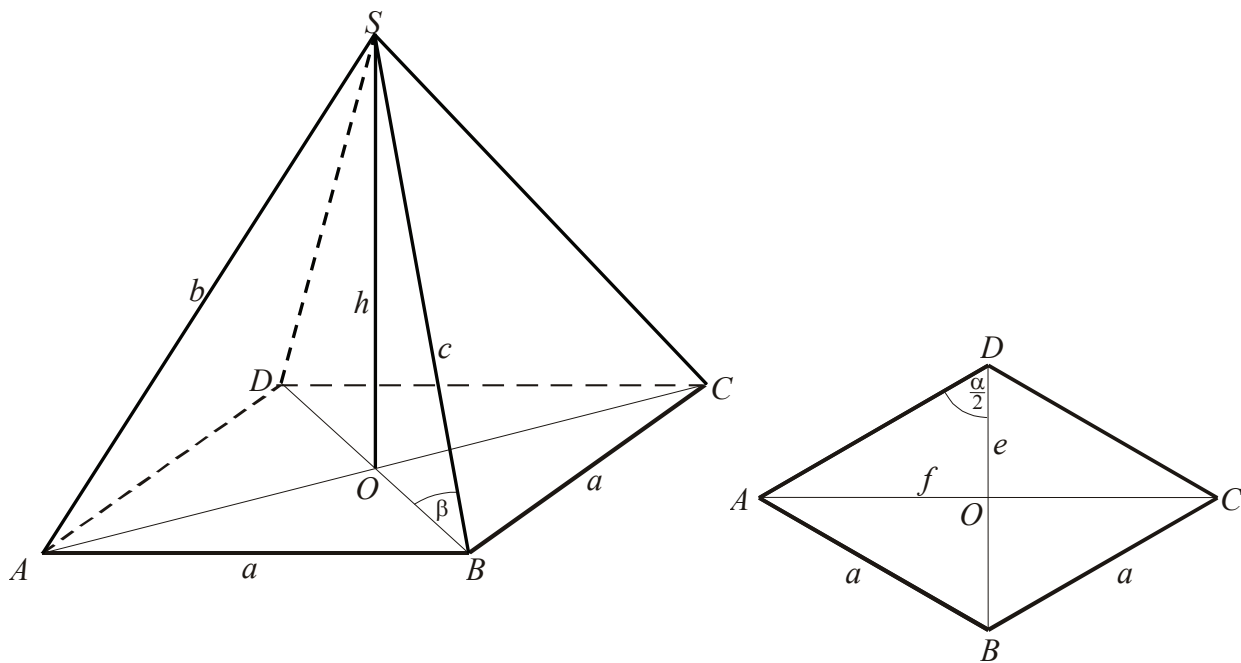
Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie długości krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa: $c = 2\sqrt{23}$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $\sin \beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$.

II sposób rozwiązania



Wprowadźmy oznaczenia:

a – długość boku rombu

e, f – długości przekątnych rombu

h – wysokość ostrosłupa

$$b = |AS| = |CS|$$

$$c = |BS| = |DS|.$$

Obliczamy długości przekątnych podstawy.

Ponieważ $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$, to trójkąt ABD jest równoboczny. Zatem mamy:

$$e = |BD| = a \text{ i } f = 2 \cdot |OC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{stad } e = 4, \quad f = 4\sqrt{3}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS , obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 10^2 - (2\sqrt{3})^2 = 88, \quad \text{stad } h = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}.$$

Obliczamy tangens kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{\frac{e}{2}} = \sqrt{22}$$

Obliczamy $\sin \beta$ korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$$

$$\sqrt{22} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$$

$$22 = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta}$$

$$22 = 23 \sin^2 \beta, \quad \text{zatem } \sin \beta = \sqrt{\frac{22}{23}}.$$

Uwaga

Jeżeli zdający, korzystając z przybliżonej wartości tangensa kąta β ($\operatorname{tg} \beta = \sqrt{22} \approx 4,6904$), odczyta miarę kąta $\beta \approx 78^\circ$ i następnie zapisze $\sin \beta \approx \sin 78^\circ \approx 0,9781$, to za takie rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$

(lub $\frac{e}{2} = 2$ i $\frac{f}{2} = 2\sqrt{3}$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $h = 2\sqrt{22}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie tangensa kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{22}$.

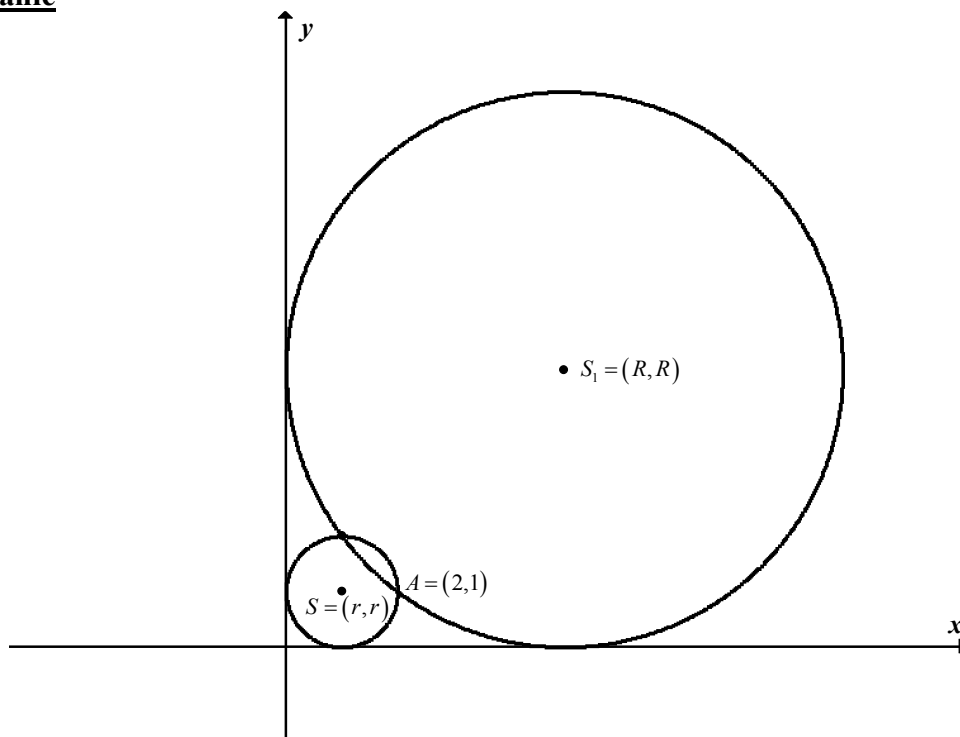
Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie $\sin \beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$ albo $\sin \beta \approx \sin 78^\circ \approx 0,9781$.

Zadanie 31. (4 pkt)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (2, 1)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Rozwiązanie



Ponieważ okrąg jest styczny do obu osi układu współrzędnych i przechodzi przez punkt $A = (2, 1)$ leżący w I ćwiartce układu współrzędnych, to jego środek również leży w I ćwiartce układu współrzędnych. Stąd środek S tego okręgu ma współrzędne $S = (r, r)$, gdzie r jest promieniem tego okręgu. Równanie okręgu ma zatem postać $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Punkt $A = (2, 1)$ leży na tym okręgu, więc $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$. Stąd otrzymujemy $r^2 - 6r + 5 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby: $r = 1$, $r = 5$. To oznacza, że są dwa okręgi spełniające warunki zadania o równaniach $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ i $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt
Zapisanie współrzędnych środka S szukanego okręgu w zależności od promienia r tego okręgu: $S = (r, r)$ lub zapisanie, że środek okręgu leży na prostej o równaniu $y = x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt
Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą:
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$ czyli $r^2 - 6r + 5 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt
Zadanie rozwiązane do końca, ale w trakcie rozwiązania popełniano błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zapisanie równań obu okręgów:

w postaci kanonicznej: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ i $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

lub w postaci ogólnej: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ i $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze równanie jednego okręgu (nie wyprowadzając go), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze równania obu okręgów (nie wyprowadzając ich), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32. (5 pkt)

Z dwóch miast A i B , odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B . Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A .

Uwaga

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v_A , v_B , x , t oznaczających odpowiednio: prędkość turysty z miasta A , prędkość turysty z miasta B oraz drogę i czas do momentu spotkania. Oczywiście niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia, np.: v_A , v_B , x , t – prędkość turysty z miasta A , prędkość turysty z miasta B oraz droga i czas do momentu spotkania.

Zapisujemy zależność między drogą x , prędkością v_A i czasem t dla jednego z turystów, np.:

$$v_A = \frac{x}{t+1} \text{ (prędkość do chwili spotkania) i } v_A = \frac{18-x}{1,5} \text{ (prędkość od chwili spotkania).}$$

Zapisujemy zależność między drogą x , prędkością v_B i czasem t dla drugiego z turysty

$$\text{(wychodzącego z miasta B), np.: } v_B = \frac{18-x}{t} \text{ (prędkość do chwili spotkania), } v_B = \frac{x}{4}$$

(prędkość od chwili spotkania).

Zapisujemy zależność między drogą a czasem w sytuacji opisanej w zadaniu za pomocą

$$\text{układu równań } \begin{cases} \frac{x}{t+1} = \frac{18-x}{1,5} \\ \frac{18-x}{t} = \frac{x}{4} \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań, doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

Rozwiązujemy równania otrzymując kolejno:	
<p>Z drugiego równania wyznaczamy x</p> $x = \frac{72}{t+4}$ <p>i wstawiamy do pierwszego równania</p> $1,5 \cdot \frac{72}{t+4} = \left(18 - \frac{72}{t+4}\right) \cdot (t+1)$ $\frac{108}{t+4} = 18t + 18 - \frac{72t}{t+4} - \frac{72}{t+4}$ <p>mnożymy obustronnie przez $t+4$</p> $108 = 18t(t+4) + 18(t+4) - 72t - 72$ $18t^2 + 18t - 108 = 0$ <p>dzielimy obustronnie przez 18</p> $t^2 + t - 6 = 0$ $\Delta = 1 + 24 = 5^2$ $t_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ $t_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$ <p>t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania</p> <p>obliczamy $x = \frac{72}{t+4} = \frac{72}{6} = 12$,</p> <p>a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np:</p> $v_A = \frac{x}{t+1} = \frac{12}{3} = 4 \text{ km/h}$ $v_B = \frac{18-x}{t} = \frac{6}{2} = 3 \text{ km/h}$	<p>Z drugiego równania wyznaczamy t</p> $t = \frac{72-4x}{x}$ <p>i wstawiamy do pierwszego równania</p> $1,5x = (18-x) \cdot \left(\frac{72-4x}{x} + 1\right)$ $1,5x = \frac{18(72-4x)}{x} + 18 - 72 + 4x - x$ $1,5x = \frac{18(72-4x)}{x} - 54 + 3x$ <p>mnożymy obustronnie przez x</p> $1,5x^2 = 1296 - 72x - 54x + 3x^2$ $1,5x^2 - 126x + 1296 = 0$ <p>dzielimy obustronnie przez 1,5</p> $x^2 - 84x + 864 = 0$ $\Delta = 7056 - 3456 = 60^2$ $x_1 = \frac{84-60}{2} = 12$ $x_2 = \frac{84+60}{2} = 72$ <p>x_2 jest sprzeczne z warunkami zadania</p> <p>obliczamy $t = \frac{72-4x}{x} = \frac{24}{12} = 2$,</p> <p>a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np.:</p> $v_A = \frac{18-x}{1,5} = \frac{6}{1,5} = 4 \text{ km/h}$ $v_B = \frac{x}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ km/h}$
<p>Z pierwszego równania wyznaczamy x</p> $x = \frac{18t+18}{t+2,5}$ <p>i wstawiamy do drugiego równania</p> $t \cdot \frac{18t+18}{t+2,5} = 4 \cdot \left(18 - \frac{18t+18}{t+2,5}\right)$ $\frac{18t^2+18t}{t+2,5} = 72 - \frac{72t+72}{t+2,5}$ <p>mnożymy obustronnie przez $t+2,5$</p> $18t^2+18t = 72(t+2,5) - 72t - 72$ $18t^2+18t-108=0$ <p>dzielimy obustronnie przez 18</p>	<p>Z pierwszego równania wyznaczamy t</p> $t = \frac{2,5x-18}{18-x}$ <p>i wstawiamy do drugiego równania</p> $(18-x) \cdot 4 = x \cdot \frac{2,5x-18}{18-x}$ <p>mnożymy obustronnie przez $18-x$</p> $(324-36x+x^2) \cdot 4 = 2,5x^2-18x$ $4x^2-144x+1296 = 2,5x^2-18x$ $1,5x^2-126x+1296=0$ <p>dzielimy obustronnie przez 1,5</p> $x^2-84x+864=0$

$t^2 + t - 6 = 0$ $\Delta = 1 + 24 = 5^2$ $t_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ $t_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$ $t_1 \text{ jest sprzeczne z warunkami zadania}$ $\text{obliczamy } x = \frac{72}{t+4} = \frac{72}{6} = 12,$ $\text{a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np.}$ $v_A = \frac{x}{t+1} = \frac{12}{3} = 4 \text{ km/h}$ $v_B = \frac{18-x}{t} = \frac{6}{2} = 3 \text{ km/h}$	$\Delta = 7056 - 3456 = 60^2$ $x_1 = \frac{84-60}{2} = 12$ $x_2 = \frac{84+60}{2} = 72$ $x_2 \text{ jest sprzeczne z warunkami zadania}$ $\text{obliczamy } t = \frac{72-4x}{x} = \frac{24}{12} = 2,$ $\text{a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np.}$ $v_A = \frac{18-x}{1,5} = \frac{6}{1,5} = 4 \text{ km/h}$ $v_B = \frac{x}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ km/h}$
<p>Zapisujemy odpowiedź: Turyści szli z prędkościami: $v_A = 4 \text{ km/h}$, $v_B = 3 \text{ km/h}$.</p>	

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt

Zapisanie zależności między prędkością v_A , prędkością v_B , drogą x i czasem t dla jednego

z turystów, np.: $\frac{x}{t+1} = \frac{18-x}{1,5}$ lub $\frac{18-x}{t} = \frac{x}{4}$ lub $18 = v_A(t+1+1,5)$ lub $18 = v_B(t+4)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\begin{cases} \frac{x}{t+1} = \frac{18-x}{1,5} \\ \frac{18-x}{t} = \frac{x}{4} \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$1,5 \cdot \frac{72}{t+4} = \left(18 - \frac{72}{t+4}\right) \cdot (t+1) \quad \text{lub} \quad 1,5x = (18-x) \cdot \left(\frac{72-4x}{x} + 1\right)$$

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Uwaga:

Jeżeli zdający przy pokonywaniu zasadniczych trudności zadania popełni błędy rachunkowe, usterki i na tym zakończy to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie: $t = 2 \text{ h}$ i nie obliczenie prędkości turystów

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą x bezbłędnie: $x = 12$ i nie obliczenie prędkości turystów

albo

- obliczenie t lub x z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie szukanych prędkości: $\begin{cases} v_A = 4 \text{ km/h} \\ v_B = 3 \text{ km/h} \end{cases}$