Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

sierpień 2013

Poziom Podstawowy

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	D	A	B	D	C	B	B	C	C	B	A	C	D	D	C	B	C	A	D	D	C	B	D	B	B

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $3x - x^2 \geq 0$.

<u>Rozwiązanie</u>

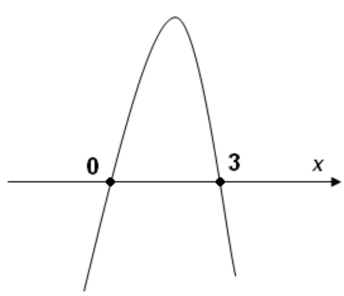
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap rozwiązania:
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-x^2 + 3x$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie
  $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ lub $-x(x-3)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9$. Stąd $x_1 = \frac{-3-3}{-2} = 3$ oraz $x_2 = \frac{-3+3}{-2} = 0$.

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \leq x \leq 3$ lub $\langle 0, 3 \rangle$ lub $x \in \langle 0, 3 \rangle$. np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$.



<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-x(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = -x^2 + 3x$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy:

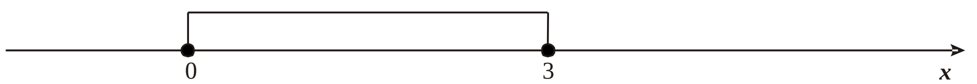
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle 0, 3\rangle$ lub $x \in \langle 0, 3\rangle$ lub $x \geq 0$ i $x \leq 3$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \geq 0,\ x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>Kryteria</u>
<u>oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \langle 0, -3\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 3, 0\rangle$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$.

<u>I sposób rozwiązania</u> (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów:

$x\left(x^2 - 12\right) - 6\left(x^2 - 12\right) = 0$ lub $x^2\left(x - 6\right) - 12\left(x - 6\right) = 0$

$\left(x - 6\right)\left(x^2 - 12\right) = 0$.

Stąd $x = 6$ lub $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 2\sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze lewa stronę równania w postaci iloczynu, np. $\left(x - 6\right)\left(x^2 - 12\right)$, $\left(x - 6\right)\left(x - \sqrt{12}\right)\left(x + \sqrt{12}\right)$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=6$ lub $x=-2\sqrt{3}$ lub $x=2\sqrt{3}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)
Stwierdzamy, że liczba 6 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-6x^2-12x+72$. Dzielimy wielomian $x^3-6x^2-12x+72$ przez dwumian $(x-6)$. Otrzymujemy iloraz (x^2-12).
Zapisujemy równanie w postaci $(x-6)(x^2-12)=0$. Stąd $(x-6)(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$ zatem $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy podzieli wielomian $x^3-6x^2-12x+72$ przez dwumian $(x-6)$, otrzyma iloraz (x^2-12) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=6$ lub $x=-\sqrt{12}$ lub $x=\sqrt{12}$

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha=2$. Oblicz $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

I sposób rozwiązania

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$ i wykorzystując zależność

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ otrzymujemy } \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha-1}{\mathrm{tg}\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

II sposób rozwiązania

Wykorzystując zależność $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zapisujemy $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$.

Przekształcamy $\sin\alpha=2\cos\alpha$, podstawiamy do wyrażenia $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{3\cos\alpha}=\frac{1}{3}.$$

III sposób rozwiązania

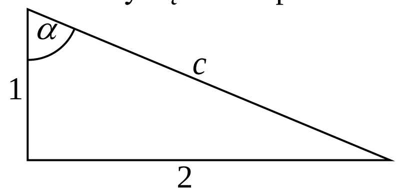
Wykorzystując zależność $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zapisujemy $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$.

Przekształcamy $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, podstawiamy do wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}}{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\sin\alpha - \sin\alpha}{2}}{\frac{2\sin\alpha + \sin\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha - \sin\alpha}{2} \cdot \frac{2}{2\sin\alpha + \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{1}{3}.$$

IV sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, zaznaczamy kąt α i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, zapisujemy

$$\sin\alpha = \frac{2}{c},\ \cos\alpha = \frac{1}{c}.$$

Podstawiając $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, wyznaczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{2}{c} - \frac{1}{c}}{\frac{2}{c} + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{2-1}{c}}{\frac{2+1}{c}} = \frac{1}{3}.$$

Schemat oceniania I, II, III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………1 pkt

gdy

- podzieli licznik i mianownik ułamka $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$, zapisze ten ułamek w postaci $\frac{\text{tg}\alpha - 1}{\text{tg}\alpha + 1}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\sin\alpha = 2\cos\alpha$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{2\cos\alpha - \cos\alpha}{2\cos\alpha + \cos\alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze zależność $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, doprowadzi ułamek do postaci $\frac{\sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}}{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\sin\alpha = \frac{2}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze $\cos\alpha = \frac{1}{c}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2, obliczy długość przeciwprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α i obliczy sinus lub cosinus tego kąta, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………………2 pkt
gdy poprawnie wyznaczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$: $\frac{1}{3}$.

__Uwagi__

1. Jeśli zdający przyjmie, że $\sin\alpha = 2$ i $\cos\alpha = 1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt α na przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\mathrm{tg}\alpha = 2$: $\alpha = 63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ = 0{,}8910$ lub $\cos 63^\circ = 0{,}4540$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\mathrm{tg}\alpha = 2$: $\alpha = 63^\circ$ oraz zapisze $\sin 63^\circ = 0{,}8910$ lub $\cos 63^\circ = 0{,}4540$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \approx 0{,}3249$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego $\mathrm{tg}\alpha = 2$: $\alpha = 64^\circ$ oraz zapisze $\sin 64^\circ = 0{,}8988$ lub $\cos 64^\circ = 0{,}4384$ i obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \approx 0{,}3443$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 29. (*2 pkt*)
W tabeli zestawiono oceny z matematyki uczniów klasy 3A na koniec semestru.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	x	1

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,6. Oblicz liczbę x ocen bardzo dobrych (5) z matematyki wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

Rozwiązanie:
Obliczamy średnią arytmetyczną ocen zestawionych w tabeli
$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}.$$
Ponieważ ta średnia arytmetyczna jest równa 3,6. Zatem otrzymujemy równanie
$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}=3,6.$$
Stąd otrzymujemy
$$\frac{5x+93}{x+27}=\frac{18}{5}$$
$$5(5x+93)=18(x+27),$$
$$25x+465=18x+486,$$
$$7x=21,$$
$$x=3.$$

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:
- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd, np.:
$$\frac{0\cdot 1+4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}=3,6 \text{ lub } \frac{4\cdot 2+9\cdot 3+13\cdot 4+x\cdot 5+1\cdot 6}{0+4+9+13+x+1}=3,6$$

albo
- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych, ale popełni błąd przy
przy przepisywaniu danych.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy liczbę ocen bardzo dobrych: 3.

Uwaga
Jeśli zdający odgadnie, że liczba ocen bardzo dobrych jest równa 3, i sprawdzi to, wykonując odpowiednie obliczenia, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli *a* jest liczbą rzeczywistą różna od zera i $a+\frac{1}{a}=3$ to $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

I sposób rozwiązania
Równość $a+\frac{1}{a}=3$ podnosimy obustronnie do kwadratu i przekształcamy równoważnie

$$a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=9,$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=9-2.$$

Stąd $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy podniesie równość obustronnie do kwadratu: $a+\frac{1}{a}=3$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}:\ 7$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Wyrażenie $a^2+\frac{1}{a^2}$ zapisujemy w postaci $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}$.

Zatem $a^2+\frac{1}{a^2}=9-2=7$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze zależność między sumą $a^2+\frac{1}{a^2}$, a kwadratem sumy $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

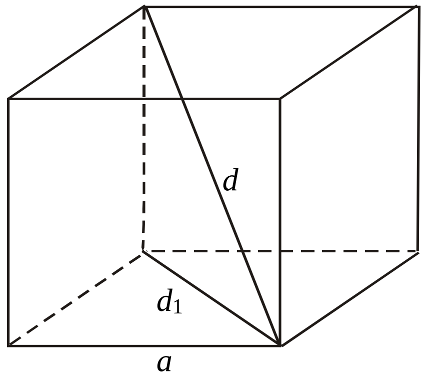
gdy obliczy wartość wyrażenia $a^2+\frac{1}{a^2}:\ 7$.

Zadanie 31. (*2 pkt*)

Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:
a – długość krawędzi sześcianu,
d_1 – długość przekątnej podstawy sześcianu,



d – długość przekątnej sześcianu.

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy: $a^2+a^2=d_1^2$ oraz $a^2+d_1^2=d^2$.

Stąd $d=a\sqrt{3}$ lub $a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

Ponieważ $d=a+2$ rozwiązujemy równanie:

- $d=\frac{\sqrt{3}}{3}d+2$ i otrzymujemy $d=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d=3+\sqrt{3}$

albo

- $a\sqrt{3}=a+2$ i otrzymujemy $a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ lub $a=1+\sqrt{3}$.

Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu: $d=3+\sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej $d=\frac{\sqrt{3}}{3}d+2$ lub $a\sqrt{3}=a+2$

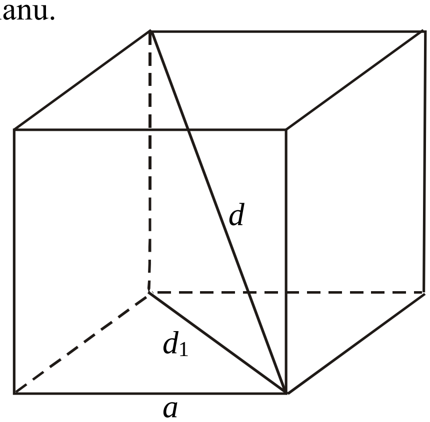
i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy długość przekątnej: $d=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d=3+\sqrt{3}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:
a – długość krawędzi sześcianu,
d – długość przekątnej sześcianu.



Korzystamy z zależności $d=a\sqrt{3}$.

Ponieważ $a=d-2$ rozwiązujemy równanie:

- $d=(d-2)\sqrt{3}$ i otrzymujemy $d\sqrt{3}-d=2\sqrt{3}$ lub $d\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3}$.

  Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu: $d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$

  lub $d=3+\sqrt{3}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej $d=\left(d-2\right)\sqrt{3}$ lub $d\sqrt{3}-d=2\sqrt{3}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy prawidłowo obliczy długość przekątnej: $d=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$ lub $d=3+\sqrt{3}$ lub

$d=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$ lub $d=\frac{12+\sqrt{48}}{4}$.

Zadanie 32. *(5 pkt)*

Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą $6000\ \mathrm{m}^2$. Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o $10\ \mathrm{m}$ i $15\ \mathrm{m}$ oraz powierzchnię większą o $2250\ \mathrm{m}^2$. Oblicz wymiary pierwszej działki.

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchnia działki pierwszej jest równe $x\cdot y$. Stąd mamy równanie $x\cdot y=6000$.

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$. Otrzymujemy zatem równanie $\left(x+10\right)\cdot\left(y+15\right)=8250$.

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ \left(x+10\right)\cdot\left(y+15\right)=8250 \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy

<table>
<tr><td>$y=\frac{6000}{x}$</td><td>$x=\frac{6000}{y}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy</td></tr>
<tr><td>$\left(x+10\right)\left(\frac{6000}{x}+15\right)=8250$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $x^2-140x+4000=0$.
$\Delta=19600-16000=3600=60^2$
$x_1=\frac{140-60}{2}=40$ lub $x_2=\frac{140+60}{2}=100$
Obliczamy y:</td><td>$\left(\frac{6000}{y}+10\right)\left(y+15\right)=8250$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $y^2-210y+9000=0$.
$\Delta=44100-36000=8100=90^2$
$y_1=\frac{210-90}{2}=60$ lub $y_2=\frac{210+90}{2}=150$
Obliczamy x:</td></tr>
</table>

$y_1=\dfrac{6000}{40}=150$ lub $y_2=\dfrac{6000}{100}=60$.	$x_1=\dfrac{6000}{60}=100$ lub $x_2=\dfrac{6000}{150}=40$.
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

<u>II sposób rozwiązania</u>

Niech x oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a y – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe $x\cdot y$. Stąd mamy równanie $x\cdot y=6000$

Wtedy $x+10$ oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a $y+15$ długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe $6000+2250=8250$. Otrzymujemy zatem równanie $(x+10)\cdot(y+15)=8250$

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ (x+10)\cdot(y+15)=8250 \end{cases}$

Stąd otrzymujemy kolejno $\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ x\cdot y+15x+10y+150=8250 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ 6000+15x+10y+150=8250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot y=6000 \\ 15x+10y-2100=0 \end{cases}$$

Równanie $15x+10y-2100=0$ dzielimy obustronnie przez 5.

Otrzymujemy $3x+2y-420=0$, stąd wyznaczamy

$y=-\dfrac{3}{2}x+210$	$x=-\dfrac{2}{3}y+140$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$x\cdot\left(-\dfrac{3}{2}x+210\right)=6000$ $-\dfrac{3}{2}x^2+210x-6000=0$ $x^2-140x+4000=0$ $\Delta=19600-16000=3600=60^2$ $x_1=\dfrac{140-60}{2}=40$ lub $x_2=\dfrac{140+60}{2}=100$ Obliczamy y: $y_1=\dfrac{6000}{40}=150$ lub $y_2=\dfrac{6000}{100}=60$.	$\left(-\dfrac{2}{3}y+140\right)\cdot y=6000$ $-\dfrac{2}{3}y^2+140y-6000=0$ $y^2-210y+9000=0$ $\Delta=44100-36000=8100=90^2$ $y_1=\dfrac{210-90}{2}=60$ lub $y_2=\dfrac{210+90}{2}=150$ Obliczamy x: $x_1=\dfrac{6000}{60}=100$ lub $x_2=\dfrac{6000}{150}=40$.
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $x \cdot y = 6000$ albo $(x+10)\cdot(y+15)=8250$, gdzie *x*, *y* oznaczają długości boków pierwszej działki.

Uwaga

Nie wymagamy opisania wprowadzonych oznaczeń, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi *x* i *y* $\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10)\cdot(y+15)=8250 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą *x* lub *y*, np:

$(x+10)\left(\frac{6000}{x}+15\right)=8250$ lub $\left(\frac{6000}{y}+10\right)(y+15)=8250$ lub $x\cdot\left(-\frac{3}{2}x+210\right)=6000$ lub $\left(-\frac{2}{3}y+140\right)\cdot y=6000$ lub $x^2-140x+4000=0$ lub $y^2-210y+9000=0$.

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą i wówczas jego rozwiązanie zostanie zakwalifikowane co najmniej do kategorii *Pokonanie zasadniczych trudności*.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą *x* i nieobliczenie drugiego boku działki,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą y i nieobliczenie pierwszego boku działki,

albo

- popełnienie błędu rachunkowego w rozwiązaniu równania z jedną niewidomą (ale otrzymanie dwóch rozwiązań) i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie wymiarów działek,

albo

- obliczenie wymiarów działki tylko w jednym przypadku.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Obliczenie wymiarów działki pierwszej: działka pierwsza ma wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.

Uwaga

Jeżeli zdający odgadnie wymiary działki w co najmniej jednym przypadku, to otrzymuje **1 punkt**, nawet w sytuacji, gdy dokonuje systematycznego „przeszukiwania" rozwiązań całkowitych.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Punkty $A=(-1,-5)$, $B=(3,-1)$ i $C=(2,4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku *ABCD*. Oblicz pole tego równoległoboku.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y=x-4$.

Wyznaczamy równanie prostej *CE* prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *C*:
$y=-x+6$

Obliczamy współrzędne punktu *E* (przecięcia prostych *AB* i *CE*) rozwiązując układ równań:
$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-x+6 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem układu jest: $x=5$, $y=1$. Stąd $E=(5,1)$.

Obliczamy długość odcinka *AB*: $|AB|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

Obliczamy długość odcinka *CE*: $|CE|=\sqrt{(5-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Zatem pole równoległoboku jest równe: $P_{ABCD}=|AB|\cdot|CE|=4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=24$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie długości odcinka: $|AB|=4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu *E*: $E=(5,1)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie wysokości równoległoboku: $|CE|=3\sqrt{2}$.

Uwaga

Zdający może obliczyć wysokość równoległoboku wykorzystując wzór na odległość wierzchołka *C* od prostej *AB*.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD}=24$.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że pole równoległoboku *ABCD* jest równe podwojonemu polu trójkąta ABC.

Pole trójkąta *ABC* obliczamy ze wzoru: $P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$.

Obliczamy pole równoległoboku:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right| =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left|(3-(-1))(4-(-5)) - (-1-(-5))(2-(-1))\right| = \left|4 \cdot 9 - 4 \cdot 3\right| = \left|24\right| = 24.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zauważenie, że $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zastosowanie wzoru na pole trójkąta: $P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

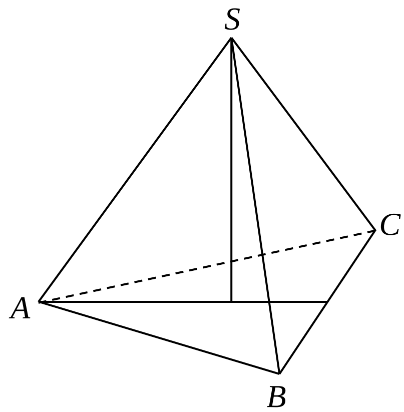
Obliczenie pola trójkąta: 12

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie pola równoległoboku: $P_{ABCD} = 24$.

Zadanie 34. (*4 pkt*)

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę *ABC* tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.



Rozwiązanie

Oznaczmy:
a – długość boku trójkąta równobocznego *ABC*, w który wpisano okręg o promieniu $r = 2$,
H – wysokość tego ostrosłupa,

α – miara kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną.

Ponieważ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, to $a = 4\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* jest równa 72, zatem

$\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 72$.

Obliczamy wysokość ostrosłupa *H*: $\frac{48\sqrt{3}}{12} \cdot H = 72$, stąd $H = \frac{72}{4\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

Zauważamy, że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{r}{H}$, stąd $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zaznaczenie kąta α między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną lub wybór właściwego kąta do dalszych obliczeń.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości boku trójkąta *ABC*: $a = 4\sqrt{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa *ABCS*: $H = 6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie tangensa kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$.