

EGZAMIN WSTĘPNY CZERWIEC 2014

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Kryteria oceniania odpowiedzi

Klucz punktowania zadań zamkniętych

zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowieź	D	C	C	A	D	A	A	B	C	C	A	B	C
zadanie	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
odpowieź	C	C	C	B	B	B	A	D	C	B	D	B	

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $(2x-3)(3-x) \geq 0$.

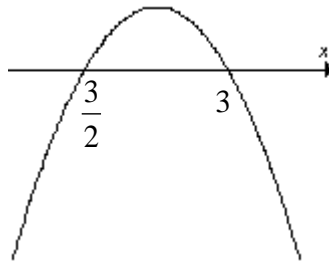
Rozwiązanie

Wyznaczamy miejsca zerowe wielomianu, występującego po lewej stronie nierówności:

$$(2x-3)=0 \text{ lub } (3-x)=0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 3$$

Szkicujemy parabolę, opisaną przez lewą stronę nierówności.



Odczytujemy z ilustracji zbiór rozwiązań nierówności: $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$.

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędnie rozwiąże nierówność,

np. $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 3, x \in \left\langle \frac{2}{3}, 3 \right\rangle$.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $\left\langle \frac{3}{2}, 3 \right\rangle$

albo

- $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

albo

- $x \geq \frac{3}{2}, x \leq 3$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie 27. (2 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Rozwiązanie

Aby wykazać prawdziwość podanej nierówności, przekształcimy ją najpierw do prostszej postaci równoważnej. Rozpoczynamy od podanej nierówności:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez 4:

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2ab \leq a^2+b^2.$$

Stąd otrzymujemy: $a^2+b^2-2ab \geq 0$, czyli $(a-b)^2 \geq 0$. Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b , zatem prawdziwa jest też

nierówność równoważna $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, co należało wykazać.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy przekształci podaną nierówność do postaci $2a^2+2b^2 \geq 4ab$ lub $a^2+b^2-2ab \geq 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

Zadanie 28. (2 pkt)

Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy wyrażenie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Następnie podstawiamy $\frac{\sqrt{3}}{3}$ za $\cos \alpha$ i otrzymujemy, że $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy przekształci wyrażenie $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ i otrzyma w wyniku: $\frac{1}{\cos \alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} : \frac{3}{\sqrt{3}}$ lub $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Obliczamy $\sin \alpha$, wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Następnie obliczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy obliczy $\sin \alpha$ wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} : \frac{3}{\sqrt{3}}$ lub $\sqrt{3}$.

Zadanie 29. (2 pkt)

Liczby $6, 2x+4, x+26$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę r tego ciągu.

Rozwiązanie (I sposób)

Ciąg $(6, 2x+4, x+26)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną

wyrazów sąsiednich. Stąd: $2x+4 = \frac{6+x+26}{2}$.

Rozwiązaniem równania jest $x=8$.

Różnica r ciągu $(6, 2x+4, x+26)$ jest równa: $r = 2 \cdot 8 + 4 - 6 = 14$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie: $2x+4 = \frac{6+x+26}{2}$ lub

$2(2x+4) = 6+x+26$, lub $2x+4-6 = x+26-2x-4$ (różnica sąsiednich wyrazów ciągu jest stała).

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy różnicę r ciągu $(6, 2x+4, x+26)$: $r = 14$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Rozwiązanie (II sposób)

Ciąg $(6, 2x+4, x+26)$ jest arytmetyczny, zatem $2x+4 = 6+r$ oraz $x+26 = 6+2r$, gdzie r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego.

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} 2x+4 = 6+r \\ x+26 = 6+2r \end{cases}$ otrzymujemy: $x=8, r=14$.

Odp. Różnica r tego ciągu jest równa 14.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze układ równań: $\begin{cases} 2x+4 = 6+r \\ x+26 = 6+2r \end{cases}$.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy różnicę r ciągu $(6, 2x+4, x+26)$: $r = 14$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Zadanie 30. (2 pkt)

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych:

$$K = \{-4, -1, 1, 5, 6\} \text{ i } L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Rozwiązanie (I sposób) (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) dwóch liczb, ze zbiorów $K = \{-4, -1, 1, 5, 6\}$ i $L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$.

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa: $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$.

Iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni, gdy:

- obie wylosowane liczby są dodatnie albo
- obie wylosowane liczby są ujemne.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa

$$|A| = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{13}{25}$.

Rozwiązanie (II sposób) (metoda tabeli)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) dwóch liczb, ze zbiorów $K = \{-4, -1, 1, 5, 6\}$ i $L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$.

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

	-4	-1	1	5	6
-3	☺	☺			
-2	☺	☺			
2			☺	☺	☺
3			☺	☺	☺
4			☺	☺	☺

Symbol ☺ w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25 \text{ i } |A| = 13, \text{ zatem } P(A) = \frac{13}{25}.$$

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$

albo

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 13$

Zdający otrzymuje2 pkt

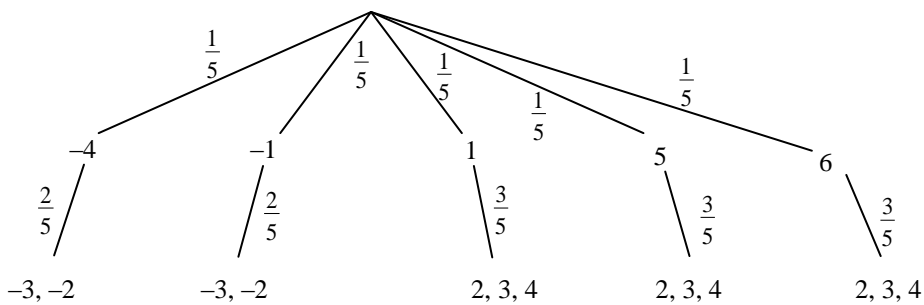
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{13}{25}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu par w tabeli, spełniających warunki zadania, i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 pkt**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

Rozwiązanie (III sposób) (metoda drzewa)

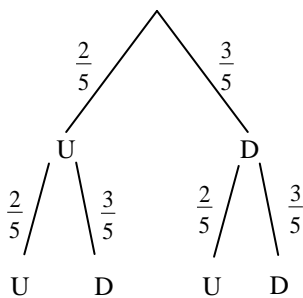
Rysujemy drzewo:



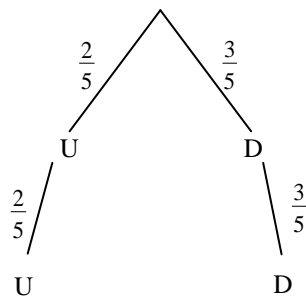
Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}.$$

albo



albo



U – oznacza wylosowanie liczby ujemnej
D – oznacza wylosowanie liczby dodatniej

Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opíše prawdopodobieństwo albo
- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi opíše prawdopodobieństwo.

Zdający otrzymuje2 pkt

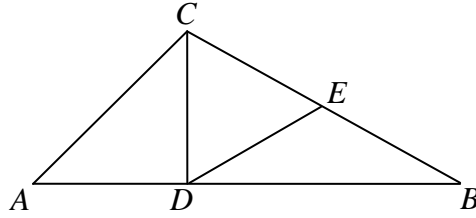
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{13}{25}$.

Uwaga

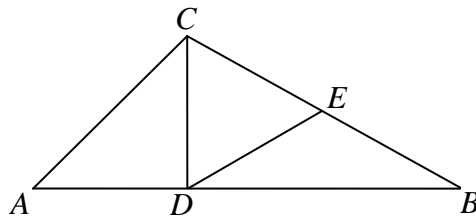
Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

Zadanie 31. (2 pkt)

Dany jest trójkąt ABC . Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, punkt E jest środkiem boku BC (tak jak na rysunku) i $|CD|=|DE|$. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.



Rozwiązanie (I sposób)



Trójkąt CDB jest prostokątny, a punkt E jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDB . Stąd wynika, że $|DE|=|BE|=|CE|$. Z treści zadania wiemy, że $|CD|=|DE|$, zatem trójkąt CDE jest równoboczny. Co należało udowodnić.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

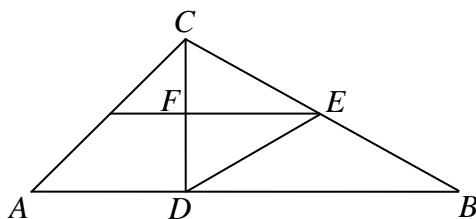
gdy stwierdzi, że punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDB i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt CDE jest równoboczny.

Rozwiązanie (II sposób)

Rysujemy prostą równoległą do podstawy AB przechodzącą przez punkt E . Otrzymujemy trójkąt CFE , który jest podobny do trójkąta CDB w skali $k = \frac{1}{2}$.



Odcinek EF jest wysokością trójkąta CDE , która dzieli podstawę CD na dwie równe części. Stąd trójkąt CDE jest równoramienny i $|DE|=|CE|$. Z treści zadania wiemy, że $|CD|=|DE|$, zatem trójkąt CDE jest równoboczny, co należało udowodnić.

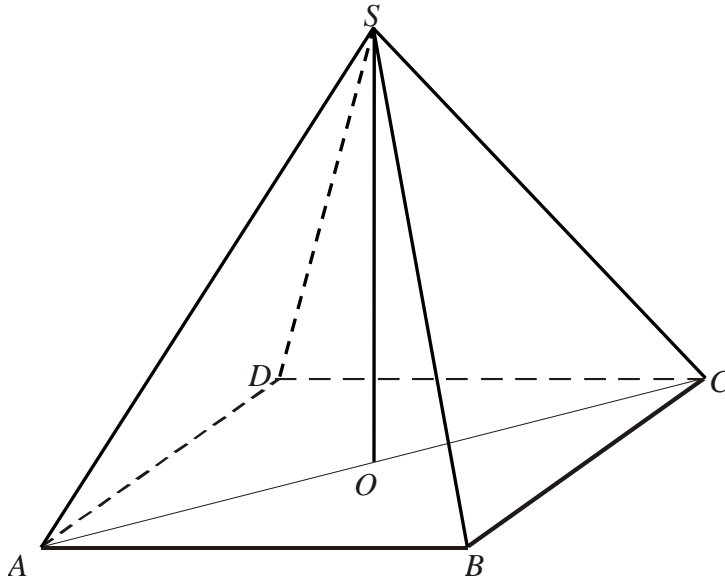
Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy narysuje prostą równoległą do podstawy AB i zauważy, że trójkąty CFE i CDB są podobne w skali $k = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

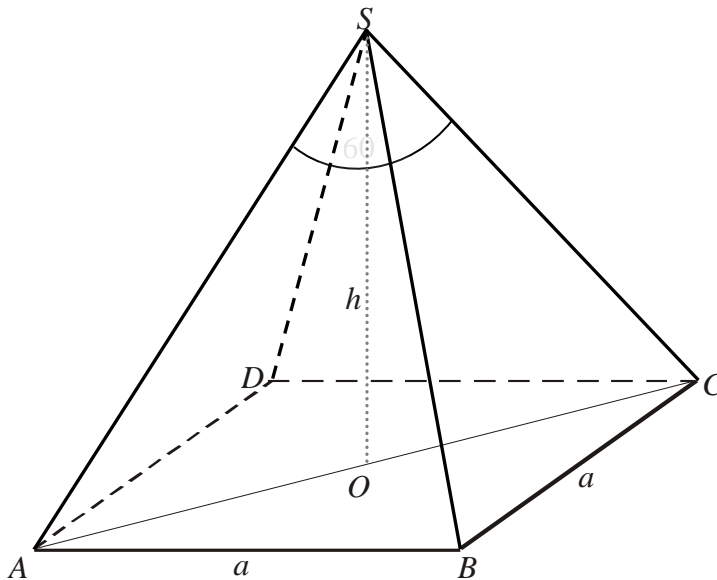
Zdający otrzymuje2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt CDE jest równoboczny.

Zadanie 32. (4 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ (zobacz rysunek) przekątna AC podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Kąt ASC między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa jest równy 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie



Niech a oznacza krawędź podstawy ostrosłupa, wtedy $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Stąd $a = 4$.

Obliczamy pole P podstawy ostrosłupa: $P = a^2 = 16$.

W trójkącie AOS kąt ASO jest równy 30° , a $|AO| = \frac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy wysokość SO ostrosłupa: $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{|AO|}{|SO|} = \frac{2\sqrt{2}}{|SO|}$, czyli $|SO| = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.

Uwaga

Zdający może zauważyć, że trójkąt ACS jest równoboczny i jego bok ma długość $4\sqrt{2}$, więc zastosowanie wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym pozwala obliczyć wysokość

$$\text{ostrosłupa: } |SO| = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Obliczamy objętość } V \text{ ostrosłupa: } V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Obliczenie długości krawędzi podstawy $|AB| = a = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie pola P podstawy: $P = 16$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $|SO| = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie objętości V ostrosłupa: $V = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

Zadanie 33. (5 pkt)

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

Uwaga

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v , t oznaczających, odpowiednio, prędkość i czas dla pana Nowaka. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie I sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Nowaka.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Nowaka: $v \cdot t = 150$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Kowalskiego: $v - 11$, $t + 1\frac{5}{6}$.

Zapisujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} v \cdot t = 150 \\ (v - 11) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$t = \frac{150}{v}$	$v = \frac{150}{t}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(v - 11) \cdot \left(\frac{150}{v} + 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2 - 11v - 900 = 0$. $\Delta = 121 + 3600 = 61^2$ $v_1 = \frac{11 - 61}{2} = -25$, sprzeczne z zał. $v > 0$ $v_2 = \frac{11 + 61}{2} = 36$ (km/h) obliczamy prędkość drugiego rowerzysty $v - 11 = 25$ (km/h)</p>	$\left(\frac{150}{t} - 11\right) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $66t^2 + 121t - 1650 = 0$. $\Delta = 14641 + 435600 = 671^2$ $t_1 = \frac{-121 - 671}{132} = -6$, sprzeczne z zał. $t > 0$ $t_2 = \frac{-121 + 671}{132} = 4\frac{1}{6}$ (h) obliczamy prędkość pana Nowaka $v = \frac{150}{4\frac{1}{6}} = 36$ (km/h) $4\frac{1}{6}$ obliczamy prędkość drugiego rowerzysty $v - 11 = 25$ (km/h)</p>
Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h.	

Rozwiązanie II sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Kowalskiego.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Kowalskiego: $v \cdot t = 150$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Nowaka: $v+11$, $t-1\frac{5}{6}$.

Zapisujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} (v+11) \cdot \left(t-1\frac{5}{6}\right) = 150 \\ v \cdot t = 150 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy

$t = \frac{150}{v}$	$v = \frac{150}{t}$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$(v+11) \cdot \left(\frac{150}{v} - 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2 + 11v - 900 = 0$.</p> $\Delta = 121 + 3600 = 61^2$ $v_1 = \frac{-11-61}{2} = -36, \text{ sprzeczne z zał. } v > 0$ $v_2 = \frac{-11+61}{2} = 25 \text{ (km/h)}$ <p>obliczamy prędkość pana Nowaka $v+11 = 36 \text{ (km/h)}$</p>	$\left(\frac{150}{t} + 11\right) \cdot \left(t - 1\frac{5}{6}\right) = 150$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $66t^2 - 121t - 1650 = 0$.</p> $\Delta = 49 + 3920 = 63^2$ $t_1 = \frac{121-671}{132} = -4\frac{1}{6}, \text{ sprzeczne z zał.}$ $t > 0$ $t_2 = \frac{121+671}{132} = 6 \text{ (h)}$ <p>obliczamy prędkość pana Kowalskiego $v = \frac{150}{6} = 25 \text{ (km/h)}$</p> <p>obliczamy prędkość pana Nowaka $v+11 = 36 \text{ (km/h)}$</p>
Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h.	

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednego z rowerzystów oraz prędkości i czasu dla obu rowerzystów przy użyciu tych samych oznaczeń,
np.: dla pana Nowaka $v \cdot t = 150$, czas pana Kowalskiego $t+1\frac{5}{6}$, prędkość pana Kowalskiego $v-11$.
- lub: dla pana Kowalskiego $v \cdot t = 150$, czas pana Nowaka $t-1\frac{5}{6}$, prędkość pana Nowaka $v+11$.

Uwaga

Nie wymagamy opisanie oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla

$$\text{pana Nowaka: } \begin{cases} v \cdot t = 150 \\ (v-11) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \end{cases}$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla

$$\text{pana Kowalskiego: } \begin{cases} (v+11) \cdot \left(t - 1\frac{5}{6}\right) = 150 \\ v \cdot t = 150 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$$(v-11) \cdot \left(\frac{150}{v} + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \text{ lub } \left(\frac{150}{t} - 11\right) \cdot \left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \text{ lub } (v+11) \cdot \left(\frac{150}{v} - 1\frac{5}{6}\right) = 150$$

$$\text{lub } \left(\frac{150}{t} + 11\right) \cdot \left(t - 1\frac{5}{6}\right) = 150.$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.

- rozwiązanie równania z niewiadomą v z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości drugiego rowerzysty

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie i nieobliczenie prędkości rowerzystów

albo

- obliczenie t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu rowerzystów.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Obliczenie prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h.

Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkość tylko jednego z rowerzystów: 36 km/h lub 25 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h, to otrzymuje **1 pkt.**

3. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozumowania i stosuje je konsekwentnie.

Zadanie 34. (4 pkt)

Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest bok AB , gdzie $A = (2, 1)$ i $B = (5, 2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

Rozwiązanie

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB : $\frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej AB jest równy (-3) . Symetralna odcinka AB ma równanie $y = -3x + b$. Punkt $S = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ jest środkiem odcinka AB . Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt S , więc $\frac{3}{2} = -3 \cdot \frac{7}{2} + b$, stąd $b = 12$. Zatem symetralna odcinka AB ma równanie $y = -3x + 12$.

Obliczamy współrzędne wierzchołka C rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = -3x + 12 \end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu C są równe: $C = (3, 3)$.

Schemat oceniania rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1 pkt

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku AB : $S = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB : $a = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Wyznaczenie równania symetralnej boku AB : $y = -3x + 12$.

Uwaga

Zdający może wyznaczyć równanie symetralnej stosując jej własność: $|AC| = |BC|$, gdzie

$C = (x, y)$ jest dowolnym punktem tej symetralnej. Wówczas otrzymuje:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} \quad \text{stąd} \quad 3x + y - 12 = 0.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = -3x + 12 \end{cases}$ i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu C .

Rozwiązanie prawie pełne..... 3 pkt

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współczynnika kierunkowego prostej AB i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu C .

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku AB i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu C .

Rozwiązanie pełne4 pkt

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu C : $C = (3, 3)$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy współrzędne wektora AB który jest prostopadły do symetralnej odcinka AB : $\vec{AB} = [3, 1]$. Zatem symetralna odcinka AB ma równanie $3x + y - b = 0$. Obliczamy

współrzędne punktu S , który jest środkiem odcinka AB : $S = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Symetralna

tego odcinka przechodzi przez punkt S , więc $3 \cdot \frac{7}{2} + \frac{3}{2} - b = 0$, stąd $b = 12$. Zatem symetralna odcinka AB ma równanie $3x + y - 12 = 0$.

Obliczamy współrzędne wierzchołka C rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu C są równe: $C = (3, 3)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania zadania.....1 pkt

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku AB : $S = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne obliczenie współrzędnych wektora AB : $\vec{AB} = [3, 1]$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Wyznaczenie równania symetralnej boku AB : $y = -3x + 12$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases}$ i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu C .

Rozwiązanie prawie pełne..... 3 pkt

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współrzędnych wektora AB i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu C .

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku AB i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu C .

Rozwiązanie pełne4 pkt

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu C : $C = (3,3)$.