

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ROZWIĄZANIA ZADAŃ  
I SCHEMAT PUNKTOWANIA**

**MAJ 2014**

**Zadanie 1. (0–1)**

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 pkt)	
		Wersja arkusza A	Wersja arkusza B
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (II.8.d)	<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 2. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie pojęcia procentu w obliczeniach (II.1.d)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 3. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (II.2.a)	<b>C</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 4. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajomość definicji logarytmu (II.1.h)	<b>D</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 5. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie prostych równań wymiernych (II.3.e)	<b>C</b>	<b>B</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 6. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	<b>B</b>	<b>D</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 7. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie zadań prowadzących do badania funkcji kwadratowej (II.4.1)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 8. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie równoległości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 9. (0–1)**

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej (IV.1.f)	<b>D</b>	<b>B</b>
------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 10. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji kwadratowej (I.4.j)	<b>B</b>	<b>D</b>
--------------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 11. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym (II.5.a)	<b>A</b>	<b>D</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 12. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (II.7.b)	<b>C</b>	<b>B</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 13. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie, czy dany ciąg jest geometryczny (II.5.b)	<b>D</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 14. (0–1)**

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Stosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (I.6.c)	<b>A</b>	<b>B</b>
--------------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 15. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (II.8.g)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 16. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, w tym z zastosowaniem trygonometrii (II.7.c)	<b>B</b>	<b>C</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 17. (0–1)**

Użycie i tworzenie strategii	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)	<b>A</b>	<b>D</b>
------------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 18. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (II.2.e)	<b>A</b>	<b>B</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 19. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach (III.9.b)	<b>A</b>	<b>D</b>
--------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 20. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych (III.9.b)	<b>C</b>	<b>B</b>
--------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 21. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym oraz stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (II.1.g)	<b>C</b>	<b>B</b>
---	--	----------	----------

**Zadanie 22. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym (II.1.g)	<b>B</b>	<b>A</b>
---	---	----------	----------

**Zadanie 23. (0–1)**

Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie sumy, iloczynu i różnicy zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c)	<b>A</b>	<b>D</b>
----------------------------	---	----------	----------

**Zadanie 24. (0–1)**

Użycie i tworzenie strategii	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.b)	<b>C</b>	<b>C</b>
------------------------------	--	----------	----------

**Zadanie 25. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Obliczanie mediany danych (III.2.e)	<b>D</b>	<b>A</b>
--------------------------	-------------------------------------	----------	----------

## Schemat oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (0–2)

Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = 2x^2 + bx + c$  jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt  $W = (4, 0)$ . Oblicz wartości współczynników  $b$  i  $c$ .

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej (IV.4.i)
------------------------------	--

#### Rozwiązanie (I sposób)

Ze wzorów  $x_w = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$  na współrzędne wierzchołka paraboli otrzymujemy:

$$-\frac{b}{2 \cdot 2} = 4 \text{ i } -\frac{\Delta}{4 \cdot 2} = 0, \text{ więc } b = -16 \text{ i } \Delta = 0.$$

$$\text{Stąd } (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0, \text{ czyli } c = 32.$$

#### Rozwiązanie (II sposób)

Wzór funkcji  $f$  doprowadzamy do postaci kanonicznej

$$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{b}{2}x\right) + c = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{4}x + \frac{b^2}{16}\right) + c - \frac{b^2}{8} = 2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + c - \frac{b^2}{8}.$$

Wierzchołek wykresu funkcji  $f$  ma zatem współrzędne  $\left(-\frac{b}{4}, c - \frac{b^2}{8}\right)$ . Otrzymujemy układ równań

$$-\frac{b}{4} = 4 \text{ i } c - \frac{b^2}{8} = 0.$$

$$\text{Stąd } b = -16 \text{ i } c = \frac{b^2}{8} = \frac{16^2}{8} = 32.$$

#### Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy :

- obliczy współczynnik  $b$ :  $b = -16$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy albo

- zapisze układ dwóch równań z niewiadomymi  $b$  i  $c$ , np.:  $-\frac{b}{4} = 4$  i  $c - \frac{b^2}{8} = 0$ ,

i nie rozwiąże go lub rozwiąże go z błędem.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy obliczy współczynniki  $b$  i  $c$ :  $b = -16$ ,  $c = 32$ .

#### Rozwiązanie (III sposób)

Ponieważ  $x_w = 4$  oraz  $y_w = 0$ , więc parabola ma z osią  $Ox$  dokładnie jeden punkt wspólny, zatem wzór funkcji można zapisać w postaci kanonicznej  $f(x) = 2(x - 4)^2$ .

Stąd  $f(x) = 2x^2 - 16x + 32$ , zatem  $b = -16$  i  $c = 32$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy zapisze, że  $f(x) = 2(x-4)^2$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy współczynniki  $b$  i  $c$ :  $b = -16$ ,  $c = 32$ .

**Zadanie 27. (0–2)**

Rozwiąż równanie  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0$ .

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązywanie równań wielomianowych metodą rozkładu na czynniki (I.3.d)
--------------------------------------	---

**Rozwiązanie (I sposób – metoda grupowania)**

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu, stosując metodę grupowania

wyrazów  $9x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$  lub  $x(9x^2 - 4) + 2(9x^2 - 4) = 0$ , stąd

$$(x+2)(9x^2 - 4) = 0.$$

$$\text{Zatem } x = -2 \text{ lub } x = -\frac{2}{3} \text{ lub } x = \frac{2}{3}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.:  $(x+2)(9x^2 - 4)$ , i na tym

poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = -2$  lub  $x = -\frac{2}{3}$  lub  $x = \frac{2}{3}$ .

**Rozwiązanie (II sposób – metoda dzielenia)**

Stwierdzamy, że liczba  $-2$  jest pierwiastkiem wielomianu  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ . Dzielimy ten wielomian przez dwumian  $(x+2)$  i otrzymujemy iloraz  $(9x^2 - 4)$ . Obliczamy

pierwiastki trójmianu  $(9x^2 - 4)$ :  $x_1 = -\frac{2}{3}$  oraz  $x_2 = \frac{2}{3}$ . Zatem  $x = -2$  lub  $x = -\frac{2}{3}$  lub  $x = \frac{2}{3}$ .

albo

Stwierdzamy, że liczba  $-\frac{2}{3}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ . Dzielimy

ten wielomian przez dwumian  $\left(x + \frac{2}{3}\right)$  i otrzymujemy iloraz  $(9x^2 + 12x - 12)$ . Obliczamy

wyróżnik trójmianu  $(9x^2 + 12x - 12)$ :  $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-12) = 576$ . Stąd pierwiastkami

trójmianu są liczby  $x_1 = \frac{-12-24}{18} = -2$  oraz  $x_2 = \frac{-12+24}{18} = \frac{2}{3}$ . Zatem  $x = -2$  lub  $x = -\frac{2}{3}$   
lub  $x = \frac{2}{3}$ .

albo

Stwierdzamy, że liczba  $\frac{2}{3}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ . Dzielimy ten wielomian przez dwumian  $\left(x - \frac{2}{3}\right)$  i otrzymujemy iloraz  $(9x^2 + 24x + 12)$ . Obliczamy wyróżnik trójmianu:  $\Delta = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 12 = 144$ . Stąd pierwiastkami trójmianu są liczby  $x_1 = \frac{-24-12}{18} = -2$  oraz  $x_2 = \frac{-24+12}{18} = -\frac{2}{3}$ . Zatem  $x = -2$  lub  $x = -\frac{2}{3}$  lub  $x = \frac{2}{3}$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- podzieli wielomian  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$  przez dwumian  $(x + 2)$ , otrzyma iloraz  $(9x^2 - 4)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$  przez dwumian  $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ , otrzyma iloraz  $(9x^2 + 24x + 12)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$  przez dwumian  $\left(x + \frac{2}{3}\right)$ , otrzyma iloraz  $(9x^2 + 12x - 12)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$  przez trójmian kwadratowy, np.  $(9x^2 - 4)$ , i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $-2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ .

### **Uwaga**

Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

### Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że każda liczba całkowita  $k$ , która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby  $3k^2$  przez 7 jest równa 5.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia (V.2.a)
----------------------------	--

#### I sposób rozwiązania

Ponieważ liczba całkowita  $k$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, więc  $k = 7m + 2$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą. Wtedy

$$3k^2 = 3(7m + 2)^2 = 3(49m^2 + 28m + 4) = 3 \cdot 49m^2 + 3 \cdot 28m + 12 = 7(3 \cdot 7m^2 + 3 \cdot 4m + 1) + 5.$$

Dwa pierwsze składniki tej sumy są podzielne przez 7, natomiast  $12 = 7 + 5$ . To oznacza, że reszta z dzielenia liczby  $3k^2$  przez 7 jest równa 5. To kończy dowód.

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy zapisze wyrażenie w postaci:  $3(7m + 2)^2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, które nie przekreślają poprawności rozumowania.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy uzasadni tezę, np. zapisze wyrażenie w postaci  $7(3 \cdot 7m^2 + 3 \cdot 4m + 1) + 5$ .

#### II sposób rozwiązania

Ponieważ liczba całkowita  $k$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, więc  $k \equiv 2 \pmod{7}$ .

Stąd wynika, że  $k^2 \equiv 4 \pmod{7}$ . Ponadto  $3 \equiv 3 \pmod{7}$ , więc z własności kongruencji

$$3k^2 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5. \text{ To kończy dowód.}$$

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy zapisze że  $k^2 \equiv 4 \pmod{7}$ .

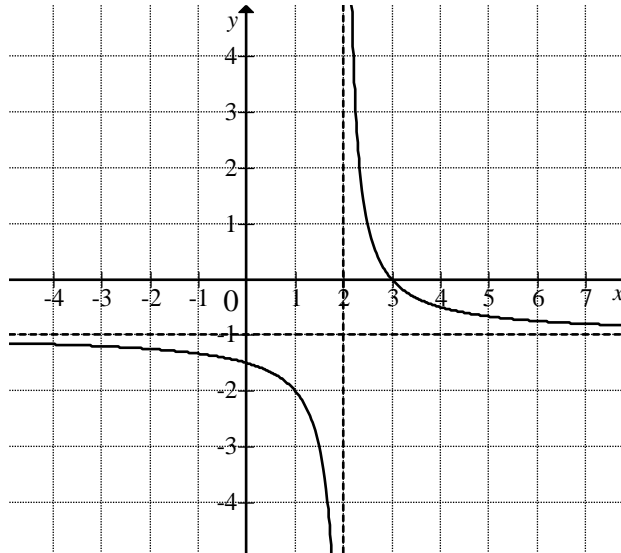
#### Uwaga

Zdający nie musi używać formalnego zapisu relacji kongruencji. Wystarczy wniosek: jeśli liczba  $k$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy zapisze  $3k^2 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5$ .

### Zadanie 29. (0–2)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji  $f$ , który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem  $y = \frac{1}{x}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq 0$ .



- Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji  $f$  są większe od 0.
- Podaj miejsce zerowe funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = f(x-3)$ .

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie z wykresu funkcji jej własności; szkicowanie na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ wykresów funkcji $y = f(x+a)$ , $y = f(x-a)$ , $y = f(x)+a$ , $y = f(x)-a$ (IV.4.b,d)
---	---

#### Rozwiązanie

- Zapisujemy zbiór wszystkich argumentów, dla których  $f(x) > 0$ :  $(2, 3)$ .
- Z rysunku wynika, że miejscem zerowym funkcji  $f$  jest liczba 3. Zatem miejscem zerowym funkcji  $g$  jest liczba  $3+3=6$ , ponieważ wykres funkcji  $g$  otrzymujemy przesuwając wykres funkcji  $f$  o 3 jednostki w prawo.

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- zapisze zbiór wszystkich argumentów, dla których  $f(x) > 0$ :  $(2, 3)$  lub  $2 < x < 3$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze miejsce zerowe funkcji  $g$

albo

- poprawnie zapisze miejsce zerowe funkcji  $g$ :  $x = 6$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór argumentów, dla których  $f(x) > 0$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy zapisze zbiór wszystkich argumentów, dla których  $f(x) > 0$ :  $(2, 3)$  i zapisze miejsce zerowe funkcji  $g$ :  $x = 6$ .

### **Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

W rozwiązaniu podpunktu a) akceptujemy zapisy:  $(3, 2)$ ,  $x \in (3, 2)$ .

### **Zadanie 30. (0–2)**

Ze zbioru liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ , polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Modelowanie matematyczne	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych; stosowanie twierdzenia znanego jako <i>klasyczna definicja prawdopodobieństwa</i> do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.b,d)
--------------------------	--

#### **Rozwiązanie I sposób** „metoda klasyczna”

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary  $(a, b)$  liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$ . Wypisujemy zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia  $A$ , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6 i zliczamy je:

$$A = \{(5, 1), (6, 2), (7, 1), (7, 3), (8, 2), (8, 4)\}$$

Zatem  $|A| = 6$ .

Zapisujemy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$ .

#### **Rozwiązanie II sposób** „metoda tabeli”

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary  $(a, b)$  liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

$\begin{smallmatrix} 2. \\ 1. \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5	X							
6		X						
7	X		X					
8		X		X				

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$ . Zliczamy, oznaczone krzyżykami, zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia  $A$ , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6:  $|A| = 6$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$ .

### **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$

albo

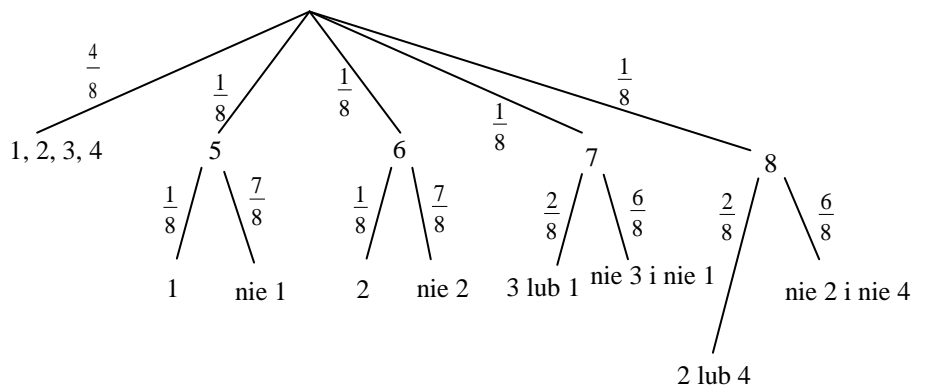
- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , polegającemu na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6:  $|A| = 6$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  jest równe  $P(A) = \frac{3}{32}$ .

### **III sposób rozwiązania** „metoda drzewka”

Rysujemy drzewo, z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjającej zdarzeniu  $A$ .



Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$ :

$$P(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy narysuje drzewko uwzględniające wszystkie gałęzie, prowadzące do sytuacji sprzyjających zdarzeniu  $A$  i przynajmniej przy jednej gałęzi zapisze poprawne prawdopodobieństwo.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

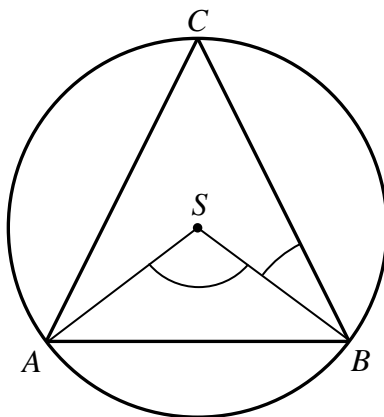
gdy zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  jest równe  $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$ .

**Uwagi**

1. Akceptujemy przybliżenia dziesiętne otrzymanego wyniku, o ile są wykonane poprawnie oraz wynik zapisany w postaci 9,375%.
2. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większą od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia  $|\Omega|$  i  $|A|$ , to otrzymuje **0 punktów**.
4. Akceptujemy sytuację, gdy zdający zapisuje liczby z losowania w odwrotnej kolejności konsekwentnie w całym swoim rozwiązaniu. Wtedy za całe rozwiązanie może otrzymać **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko odpowiedź  $P(A) = \frac{6}{64}$ , to otrzymuje **2 punkty**, jeśli natomiast zapisze tylko odpowiedź  $P(A) = \frac{3}{32}$ , to otrzymuje **1 punkt**.

### Zadanie 31. (0–2)

Środek  $S$  okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym  $ABC$ , o ramionach  $AC$  i  $BC$ , leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).

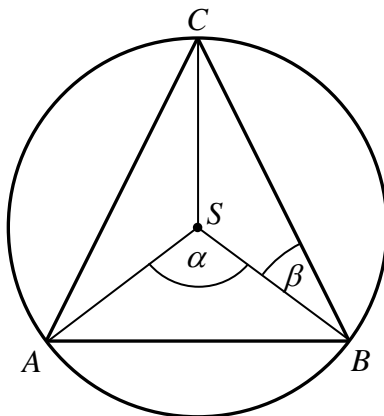


Wykaż, że miara kąta wypukłego  $ASB$  jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego  $BSC$ .

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego, z wykorzystaniem związków miarowych w figurach płaskich (V.7.c)
----------------------------	--

### Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i poprowadźmy promień  $SC$  okręgu.



Z założenia wynika, że kąt wpisany  $ACB$  oraz kąt środkowy  $ASB$  leżą po tej samej stronie cięciwy  $AB$ .

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że  $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\alpha$ . Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny (ramionami są  $AC$  i  $BC$ ), więc prosta  $CS$

zawiera dwusieczną kąta  $ACB$ , zatem  $|\sphericalangle SCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{4}\alpha$ . Odcinki  $SC$  i  $SB$

to promienie okręgu, więc trójkąt  $BCS$  jest równoramienny. Stąd wynika, że  $\beta = |\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{1}{4}\alpha$ , co kończy dowód.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy

- wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym oraz wykorzysta równość kątów  $SBC$  i  $SCB$  lub równość kątów  $SCA$  i  $SAC$  i nie uzasadni tezy

albo

- wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym oraz uzasadni równość kątów  $SBC$  i  $SAC$ , korzystając z równoramienności trójkątów  $ABC$  i  $ABS$ , i nie uzasadni tezy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy uzasadni, że kąt  $ASB$  jest cztery razy większy od kąta  $SBC$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający w przedstawionym rozumowaniu rozważy wyłącznie szczególny przypadek, np. trójkąt równoboczny, to otrzymuje **0 punktów**.

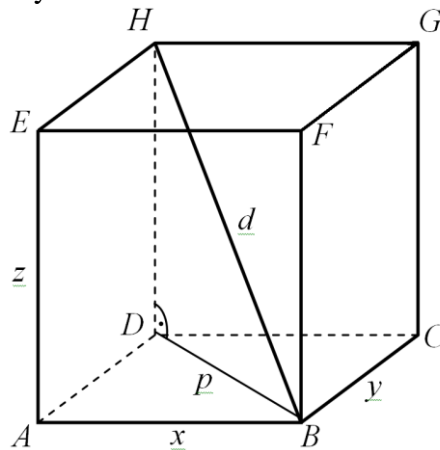
**Zadanie 32. (0–4)**

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to  $1 : 2 : 3$ . Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach (IV.9.b)
------------------------------	---

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole  $P_c$  powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe  $P_c = 2xy + 2xz + 2yz$ . Możemy przyjąć, że  $x : y : z = 1 : 2 : 3$ . Wtedy  $y = 2x$  oraz  $z = 3x$ . Zatem

$$P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 4x^2 + 6x^2 + 12x^2 = 22x^2.$$

Ponieważ  $P_c = 198$ , więc otrzymujemy równanie

$$22x^2 = 198.$$

Stąd  $x^2 = 9$ , więc  $x = 3$ .

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów  $ABD$  i  $BDH$  otrzymujemy

$$p^2 = x^2 + y^2 \text{ oraz } d^2 = p^2 + z^2.$$

Stąd

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Zatem

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{14x^2} = x\sqrt{14} = 3\sqrt{14} .$$

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Zdający

- zapisze długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej, np.:  $x$ ,  $2x$ ,  $3x$

albo

- zapisze długość przekątnej prostopadłościanu w zależności od długości jego krawędzi:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający

- zapisze pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję jednej zmiennej, np.:  $P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x$

albo

- zapisze długość przekątnej prostopadłościanu jako funkcję jednej zmiennej, np.:

$$d = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} .$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający obliczy długość jednej z krawędzi prostopadłościanu, np.:  $x = 3$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Zdający obliczy długość przekątnej prostopadłościanu:  $d = 3\sqrt{14}$ .

### **Uwagi**

1. Jeżeli zdający odgadnie długość jednej z krawędzi prostopadłościanu i obliczy długość przekątnej tego prostopadłościanu, to otrzymuje maksymalnie **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający błędnie uzależni długości krawędzi od jednej zmiennej, przyjmując:  $x$ ,  $\frac{1}{2}x$ ,

$\frac{1}{3}x$ , i konsekwentnie oblicza długość przekątnej tego prostopadłościanu, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**. Inne, niepoprawne interpretacje stosunków długości krawędzi, stanowią podstawę do przyznania za rozwiązanie **0 punktów**.

### Zadanie 33. (0–5)

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrowki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o 1 km/h mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Modelowanie matematyczne

Rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym prowadzących do równań kwadratowych (III.3.b)

#### Rozwiązanie (1 sposób)

Niech  $v$  oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza, a  $t$  czas wyrażony w godzinach, w jakim zszedł ze wzgórza. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci

$$v \cdot t = 2,1.$$

Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze, jest zatem równa  $v - 1$ , natomiast czas, w jakim wszedł, jest równy  $1\frac{4}{60} - t = 1\frac{1}{15} - t$ . Możemy więc zapisać drugie równanie

$$(v-1) \cdot \left(\frac{16}{15} - t\right) = 2,1.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{16}{15}v - v \cdot t - \frac{16}{15} + t = \frac{21}{10}.$$

Po podstawieniu  $v \cdot t = \frac{21}{10}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{16}{15}v - \frac{21}{10} - \frac{16}{15} + t &= \frac{21}{10}, \\ t &= \frac{79}{15} - \frac{16}{15}v. \end{aligned}$$

Podstawiając  $t = \frac{79}{15} - \frac{16}{15}v$  w równaniu  $v \cdot t = \frac{21}{10}$ , otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą  $v$

$$\begin{aligned} v \left( \frac{79}{15} - \frac{16}{15}v \right) &= \frac{21}{10}, \\ \frac{16}{15}v^2 - \frac{79}{15}v + \frac{21}{10} &= 0, \\ 32v^2 - 158v + 63 &= 0, \\ \Delta &= (-158)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 63 = 16900, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16900} = 130 \\ v_1 &= \frac{158 - 130}{2 \cdot 32} = \frac{28}{2 \cdot 32} = \frac{7}{16}, \quad v_2 = \frac{158 + 130}{2 \cdot 32} = \frac{288}{2 \cdot 32} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość, z jaką turysta wchodziłby na wzgórze, byłaby ujemna, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania, gdyż wtedy  $v - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$ .

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze jest równa 3,5 km/h.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Niech  $v$  oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza.

Wówczas czas, w jakim zszedł ze wzgórza, wyrażony w godzinach jest równy  $\frac{2,1}{v}$ . Ponieważ

łączy czas wejścia i zejścia był równy 1 godzinę i 4 minuty, czyli  $1\frac{4}{60} = 1\frac{1}{15} = \frac{16}{15}$  godziny,

więc czas, w jakim wchodził, był równy  $\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}$  godziny. Stąd z kolei wynika, że średnia

prędkość, z jaką wchodził, była równa  $\frac{2,1}{\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}}$  km/h. Otrzymujemy w ten sposób równanie

z niewiadomą  $v$

$$\frac{2,1}{\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}} = v - 1,$$

$$\frac{21}{10} \cdot \frac{30v}{32v - 63} = v - 1,$$

$$\frac{63v}{32v - 63} = v - 1,$$

$$63v = (v - 1)(32v - 63),$$

$$63v = 32v^2 - 95v + 63,$$

$$32v^2 - 158v + 63 = 0,$$

$$\Delta = (-158)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 63 = 16900, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16900} = 130$$

$$v_1 = \frac{158 - 130}{2 \cdot 32} = \frac{28}{2 \cdot 32} = \frac{7}{16}, \quad v_2 = \frac{158 + 130}{2 \cdot 32} = \frac{288}{2 \cdot 32} = \frac{9}{2}.$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość, z jaką turysta wchodziłby na wzgórze, byłaby ujemna. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania, gdyż wtedy  $v - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$ .

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze jest równa 3,5 km/h.

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**  
Zdający

- oznaczony prędkość średnią, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza oraz czas wyrażony w godzinach, w jakim schodził ze wzgórza, i zapisze zależność między średnią prędkością i czasem, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza

$t$  – czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza

$$(v - 1) \cdot \left( \frac{16}{15} - t \right) = 2,1$$

albo

- oznaczmy prędkość średnią, wyrażoną w km/h, z jaką turysta wchodził na wzgórze oraz czas wyrażony w godzinach, w jakim wchodził na wzgórze, i zapisze zależność między średnią prędkością i czasem, w jakim turysta schodził ze wzgórza, np.:  
 $v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze  
 $t$  – czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

$$(v+1) \cdot \left( \frac{16}{15} - t \right) = 2,1$$

### Uwaga

Zdający nie otrzymuje punktu, jeśli zapisze jedynie  $v \cdot t = 2,1$ .

### **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi  $v, t$  – odpowiednio prędkość i czas schodzenia turysty ze wzgórza, np.;

$$\begin{cases} (v-1) \cdot \left( \frac{16}{15} - t \right) = 2,1 \\ v \cdot t = 2,1 \end{cases}$$

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi  $v, t$  – odpowiednio prędkość i czas wchodzenia turysty na wzgórze, np.;

$$\begin{cases} (v+1) \cdot \left( \frac{16}{15} - t \right) = 2,1 \\ v \cdot t = 2,1 \end{cases}$$

albo

- oznaczmy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza  
 $v-1$  to średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze  
 $\frac{2,1}{v-1}$  to czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

albo

- oznaczmy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza  
 $\frac{2,1}{v}$  to czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza  
 $\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}$  to czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

albo

- oznaczmy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta schodził ze wzgórza, np.:

$v$  – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza  
 $v-1$  to średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze

$\frac{2,1}{v}$  to czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza.

**Uwaga**

Jeśli zdający wprowadza tylko jedną niewiadomą na oznaczenie jednej z czterech wielkości: czas wchodzenia, czas schodzenia, prędkość wchodzenia, prędkość schodzenia, to **2 punkty** otrzymuje wtedy, gdy uzależni od wprowadzonej zmiennej dwie z pozostałych trzech wielkości.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, gdy  $v, t$  – odpowiednio prędkość i czas schodzenia turysty ze wzgórza, np.;

$$v\left(\frac{79}{15} - \frac{16}{15}v\right) = 2,1$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, gdy  $v, t$  – odpowiednio prędkość i czas wchodzenia turysty na wzgórze, np.;

$$v\left(\frac{16}{15}v - \frac{47}{15}\right) = 2,1$$

albo

- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\frac{2,1}{v-1} + \frac{2,1}{v} = \frac{16}{15}$$

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

Zdający

- rozwiąże równanie z niewiadomą inną niż średnia prędkość schodzenia bezbłędnie i nie obliczy średniej prędkości schodzenia

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą  $v$  (średnia prędkość schodzenia) z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający obliczy średnią prędkość wchodzenia turysty na wzgórze: 3,5 km/h

**Uwagi**

1. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozwiązania i stosuje je konsekwentnie.

2. Jeżeli zdający oznaczy przez  $v$  prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze i zapisze, że  $v - 1$  oznacza prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza i konsekwentnie do przyjętych oznaczeń rozwiąże zadanie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

### **Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

#### **Przykład 1.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza,  $t$  - czas, w którym turysta schodził ze wzgórza i zapisze:

$$v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}$$

$$\begin{cases} v \cdot t = 2,1 \\ (v - 1) \frac{16}{15} - t = 2,1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia  $\frac{16}{15} - t$  w nawias. Zapis równania  $v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}$  wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

#### **Przykład 2.**

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

$v$  - prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza,  $t$  - czas, w którym turysta schodził ze wzgórza i zapisze:

$$v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t} \quad \begin{cases} v = \frac{2,1}{t} \\ v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t} \end{cases} \quad \frac{2,1}{t} - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}, \quad \frac{2,1}{t} - 1 = \frac{2,1}{-t}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu  $\frac{2,1}{t} - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}$  zdający

przestawił liczby w liczniku i mianowniku ułamka  $\frac{16}{15}$  lub nawet pominął ten ułamek.

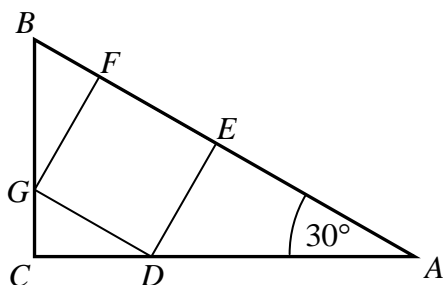
#### **Przykład 3.**

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np.  $-32v^2 + 158v + 63 = 0$  zamiast równania  $32v^2 - 158v + 63 = 0$  (np. w wyniku złego przepisania znaku), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci rozwiązanie niespełniające

warunków zadania i pozostawi wynik, który może być realną prędkością poruszania się turysty, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.

### Zadanie 34. (0–4)

Kąt  $CAB$  trójkąta prostokątnego  $ACB$  ma miarę  $30^\circ$ . Pole kwadratu  $DEFG$  wpisanego w ten trójkąt (zobacz rysunek) jest równe 4. Oblicz pole trójkąta  $ACB$ .



Użycie i tworzenie strategii

Wykorzystanie własności figur podobnych w zadaniach (IV.7.b)

#### I sposób rozwiązania

Niech  $a$  oznacza długość boku kwadratu  $DEFG$ . Zatem  $a = 2$ .

Trójkąt  $ADE$  to „połowa trójkąta równobocznego” o boku  $AD$  i wysokości  $AE$ , więc

$$|AD| = 2a = 4 \text{ oraz } |AE| = \frac{|AD|\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Trójkąt  $GBF$  to „połowa trójkąta równobocznego” o boku  $BG$  i wysokości  $FG$ , więc

$$|BG| = 2|BF| \text{ oraz } |FG| = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem  $2 = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$ , więc  $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$  oraz  $|BF| = \frac{1}{2}|BG| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Trójkąt  $ACB$  jest „połową trójkąta równobocznego” o boku  $AB$ . Obliczamy

$$|AB| = |AE| + |EF| + |BF| = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2.$$

Pole trójkąta  $ACB$  jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2 \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \frac{64}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{3} + 4 \right) = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4.$$

#### Uwaga

Podany sposób rozwiązania polega na rozwiązaniu trójkątów prostokątnych  $ADE$  i  $BGF$ . Tak samo możemy postąpić rozwiązując inną parę trójkątów prostokątnych:  $ADE$  i  $DCG$  lub  $DCG$  i  $BGF$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania .....1 pkt**

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający skorzysta z własności trójkąta  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  albo z funkcji trygonometrycznych

i poprawnie obliczy długość jednego z odcinków:  $|AD|=4$ ,  $|AE|=2\sqrt{3}$ ,  $|BG|=\frac{4}{\sqrt{3}}$ ,

$$|BF|=\frac{2}{\sqrt{3}}, |CD|=\sqrt{3}, |CG|=1.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający poprawnie obliczy długość jednego z boków trójkąta  $ACB$ :

$$|AB|=\frac{8}{3}\sqrt{3}+2 \text{ lub } |BC|=\frac{4}{\sqrt{3}}+1 \text{ lub } |AC|=\sqrt{3}+4.$$

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Zdający obliczy pole trójkąta  $ACB$ :  $P_{ACB}=\frac{19}{6}\sqrt{3}+4$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze wynik w innej, równoważnej postaci, to otrzymuje **4 punkty**, np.:

$$P_{ACB}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{8}{3}\sqrt{3}+2\right)^2, P_{ACB}=\frac{1}{2}(4+\sqrt{3})\cdot\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right).$$

### II sposób rozwiązania

Niech  $a$  oznacza długość boku kwadratu  $DEFG$ . Zatem  $a=2$ .

Trójkąt  $ADE$  to „połowa trójkąta równobocznego” o boku  $AD$ , więc  $|AD|=2a=4$ . Zatem pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ADE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|AD|^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4^2\sqrt{3}}{8}=2\sqrt{3}.$$

Trójkąt  $GBF$  to także „połowa trójkąta równobocznego” o boku  $BG$ , więc  $|BG|=2|BF|$

Zatem  $2=\frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$ , więc  $|BG|=\frac{4}{\sqrt{3}}$ . Pole trójkąta  $GBF$  jest więc równe

$$P_{GBF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|BG|^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{8}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Trójkąt  $DGC$  również jest „połową trójkąta równobocznego” o boku  $DG$ . Ponieważ  $|DG|=a=2$ , więc pole tego trójkąta jest równe

$$P_{DCG}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|DG|^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2^2\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obliczamy pole trójkąta  $ACB$

$$P_{ACB}=P_{ADE}+P_{GBF}+P_{DCG}+P_{DEFG}=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+4=\frac{19}{6}\sqrt{3}+4.$$

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....2 pkt

Zdający obliczy pole jednego z trójkątów  $ADE$ ,  $GBF$ ,  $DCG$ :

$$P_{ADE} = 2\sqrt{3}, P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3 pkt

Zdający obliczy pole każdego z trójkątów  $ADE$ ,  $GBF$ ,  $DCG$ :

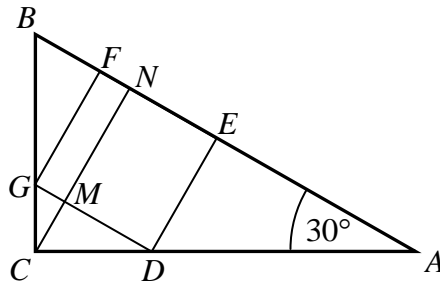
$$P_{ADE} = 2\sqrt{3}, P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Rozwiązanie pełne** .....4 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta  $ACB$ :  $P_{ACB} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$ .

### III sposób rozwiązania

Niech  $a$  oznacza długość boku kwadratu  $DEFG$ . Zatem  $a = 2$ . Zauważmy, że trójkąt  $ACB$  jest podobny do trójkąta  $DCG$



Trójkąt  $DCG$  to „połowa trójkąta równobocznego” o boku  $DG$  długości 2, więc jego pole jest równe

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|DG|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wysokość  $CM$  tego trójkąta obliczymy wykorzystując wzór na jego pole

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |CM| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |CM| = |CM|,$$

więc  $|CM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Zatem wysokość  $CN$  trójkąta  $ACB$  opuszczona na  $AB$  jest równa

$$|CN| = |CM| + |MN| = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

Skala podobieństwa trójkąta  $ACB$  do trójkąta  $DCG$  jest więc równa

$$\frac{|CN|}{|CM|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ponieważ stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali ich podobieństwa, więc

$$\frac{P_{ACB}}{P_{DCG}} = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{3} = \frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Stąd i z obliczonego wcześniej pola trójkąta  $DCG$  otrzymujemy

$$P_{ACB} = \left( \frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) P_{DCG} = \left( \frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19}{6} \sqrt{3} + 4.$$

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania .....1 pkt**

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający obliczy pole jednego z trójkątów  $ADE$ ,  $GFB$ ,  $DCG$ :

$$P_{ADE} = 2\sqrt{3}, \quad P_{GFB} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający obliczy skalę podobieństwa trójkąta  $ACB$  do jednego z trójkątów  $ADE$ ,  $GFB$ ,  $DCG$

i wykorzysta twierdzenie o stosunku pól figur podobnych, np.:

$$\frac{|CN|}{|CM|} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \frac{P_{ACB}}{P_{DCG}} = \left( 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2.$$

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Zdający obliczy pole trójkąta  $ACB$ :  $P_{ABC} = \frac{19}{6} \sqrt{3} + 4.$