CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

# EGZAMIN MATURALNY
## W ROKU SZKOLNYM 2013/2014

# MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ
## I SCHEMAT PUNKTOWANIA

**SIERPIEŃ 2014**

# Klucz punktowania zadań zamkniętych

| Nr zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odp. | A | A | B | B | C | B | B | D | A | D | C | D | B | D | C | C | C | B | D | C | C | D | D | A | A |

# Schemat oceniania zadań otwartych

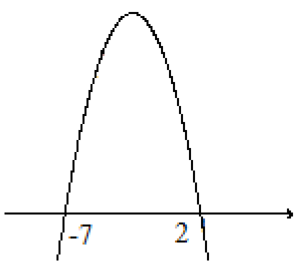
## Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $-x^2-5x+14<0$.

**Rozwiązanie**

Ze wzorów $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ na pierwiastki trójmianu kwadratowego otrzymujemy: $x_1=2$, $x_2=-7$.

Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku dołowi i zaznaczamy na osi argumentów jej miejsca zerowe.




Odczytujemy zbiór rozwiązań: $x\in(-\infty,-7)\cup(2,\infty)$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..................................................................................................1 p.**

gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=2$, $x_2=-7$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2+5x-14$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x+7)(x-2)>0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. $x_1=7$, $x_2=2$, $x\in(-\infty,2)\cup(7,\infty)$

albo

- doprowadzi nierówność do postaci $\left|x+\frac{5}{2}\right|>\frac{9}{2}$ (na przykład z postaci $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}>0$) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .......................................................................................................2 p.**
gdy poda odpowiedź w postaci:
- $x\in(-\infty,-7)\cup(2,\infty)$

albo
- $x<-7$ lub $x>2$

albo
- $x<-7$, $x>2$

albo
- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

# Zadanie 27. (0–2)
Rozwiąż równanie $x^3-6x^2-11x+66=0$.

**Rozwiązanie I sposób** (*grupowanie wyrazów*)
Stosując metodę grupowania otrzymujemy:
$x^2(x-6)-11(x-6)=0$ albo $x\left(x^2-11\right)-6\left(x^2-11\right)=0$, stąd $(x-6)\left(x^2-11\right)=0$, zatem $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**
**Zdający otrzymuje .......................................................................................................1 p.**
gdy doprowadzi lewą stronę równania do postaci iloczynowej, np.: $(x-6)\left(x^2-11\right)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
**Zdający otrzymuje .......................................................................................................2 p.**
gdy poda rozwiązanie $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

**Uwaga**
Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje **1 punkt**.

**Rozwiązanie II sposób** *(dzielenie)*
Sprawdzamy, że $W(6)=6^3-6\cdot 6^2-11\cdot 6+66=0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x=6$.
Dzielimy wielomian przez dwumian $x-6$ i otrzymujemy $x^2-11$. Mamy więc równanie postaci $(x-6)\left(x^2-11\right)=0$, a stąd otrzymujemy $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................1 p.**

gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $x-6$, otrzyma iloraz $x^2-11$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................2 p.**

gdy poda rozwiązanie $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

**Uwaga**

Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

# Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

**Rozwiązanie I sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(2n)^3+(2n+2)^3+(2n+4)^3=8n^3+8n^3+24n^2+24n+8+8n^3+48n^2+96n+64=$$
$$=24n^3+72n^2+120n+72=24\left(n^3+3n^2+5n+3\right)=24\cdot l$$

Liczba postaci $24\cdot l$, gdzie $l$ jest liczb naturalną jest podzielna przez 24.

**Uwaga**

Zdający może zapisać trzy kolejne liczby naturalne parzyste w innej postaci, np.: $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$(2n)^3+(2n+2)^3+(2n+4)^3=24\left(n^3+3n^2+5n+3\right)$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie II sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(2n)^3+(2n+2)^3+(2n+4)^3=(2n)^3+\left(2(n+1)\right)^3+\left(2(n+2)\right)^3=8\left(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right)=$$
$$=8\left(3n^3+9n^2+15n+9\right)=24\left(n^3+3n^2+5n+3\right).$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie $l$ jest liczb naturalną jest podzielna przez 24.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 24\left(n^3 + 3n^2 + 5n + 3\right)$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie III sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $n-2$, $n$, $n+2$, gdzie $n$ jest parzystą liczbą środkową i $n \geq 2$.
Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n$$

$n$ jest liczbą parzystą, stąd $n^3$ jest podzielne przez 8.

Zatem liczba $3n^3$ jest podzielna przez 24.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 24n$ .

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie IV sposób**

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n-2$, $2n$, $2n+2$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną.
Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 = 8\left[(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3\right] =$$
$$= 8\left(n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) = 8\left(3n^3 + 6n\right) = 24\left(n^3 + 2n\right).$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie $l$ jest liczb naturalną jest podzielna przez 24.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 = 24\left(n^3 + 2n\right)$.

**Zdający otrzymuje ................................................................................................................. 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

# Zadanie 29. (0–2)

Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

**<u>Rozwiązanie I sposób</u>**

Sprowadzamy wyrażenie $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$ do wspólnego mianownika i otrzymujemy $\frac{4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=25$. Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy $\frac{4}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=25$, a stąd $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{4}{25}$, a zatem $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$ (kąt $\alpha$ jest ostry).

**<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>**

**Zdający otrzymuje ................................................................................................................. 1 p.**

gdy:

- sprowadzi wyrażenie $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$ do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

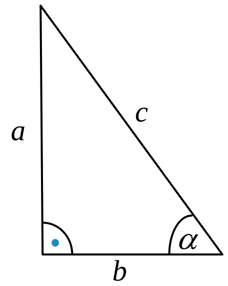
- doprowadzi wyrażenie do postaci $4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=25\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ................................................................................................................. 2 p.**

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

**<u>Rozwiązanie II sposób</u>**

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych przez $a$ i $b$ oraz zaznaczamy kąt ostry $\alpha$ taki, że $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ lub $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:
$c^2 = a^2 + b^2$.

Ponieważ $\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25$, więc $\frac{4c^2}{a^2} + \frac{4c^2}{b^2} = 25$, czyli $\frac{4c^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2} = 25$. Stąd
$\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25$.

Ponieważ $\sin^2\alpha = \frac{a^2}{c^2}$ i $\cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}$, to $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{4}{25}$. Zatem $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$ (kąt $\alpha$ jest ostry).

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b, zaznaczy w tym trójkącie kąt $\alpha$ i zapisze:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i $\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

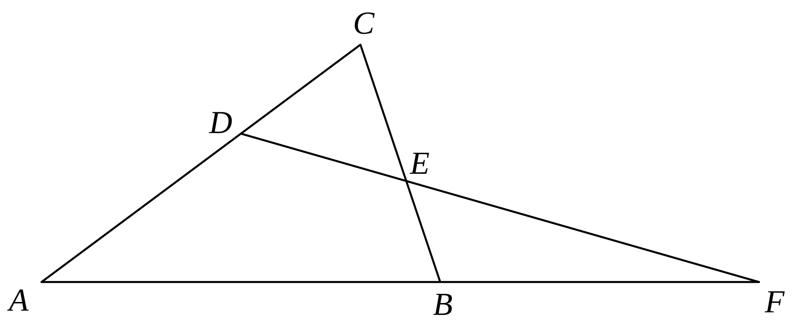
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i $4c^2c^2 = 25a^2b^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$.

# Zadanie 30. (0–2)

Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC| > |BC|$. Na bokach *AC* i *BC* tego trójkąta obrano odpowiednio takie punkty *D* i *E*, że zachodzi równość $|CD| = |CE|$. Proste *AB* i *DE* przecinają się w punkcie *F* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| - 2\cdot|\sphericalangle AFD|$.



**Rozwiązanie I sposób**

Niech $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ i $|\sphericalangle AFD| = \gamma$.

Ponieważ $|\sphericalangle ABC| = \beta$, stąd $|\sphericalangle FBE| = 180° - \beta$ (z własności kątów przyległych).

$|\sphericalangle BEF| = 180° - (180° - \beta + \gamma) = \beta - \gamma$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie *BEF*).

Ponieważ $|\sphericalangle BEF| = \beta - \gamma$, więc $|\sphericalangle CED| = \beta - \gamma$ (z własności kątów wierzchołkowych).

W trójkącie *CDE*, mamy $|CD| = |CE|$, zatem $|\sphericalangle CDE| = \beta - \gamma$.

$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ACB| = 180° - (\beta - \gamma + \beta - \gamma) = 180° - 2\beta + 2\gamma$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie *DCE*).

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = 180°$, stąd $\alpha + \beta + 180° - 2\beta + 2\gamma = 180°$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie *DCE*). Zatem $\alpha = \beta - 2\gamma$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkątach *BEF* i *CDE*, np.: $|\sphericalangle BEF| = \beta - \gamma$ i $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\beta + 2\gamma$.

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ACB|$ i $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = 180°$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

**Rozwiązanie II sposób**

Niech $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle AFD| = \gamma$ i $|\sphericalangle CDE| = \delta$.

Trójkąt *CDE* jest równoramienny, stąd $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$.

Ponieważ $|\sphericalangle CED| = \delta$, stąd $|\sphericalangle BEF| = \delta$ (z własności kątów wierzchołkowych).

Zatem $\beta = \gamma + \delta$ ($|\sphericalangle ABC| = \beta$ jest kątem zewnętrznym trójkąta *BEF*). Stąd $\beta - \gamma = \delta$

Ponieważ $|\sphericalangle CDE| = \delta$, stąd $|\sphericalangle ADE| = 180° - \delta$ (z własności kątów przyległych).

Podobnie $|\sphericalangle CED| = \delta$, stąd $|\sphericalangle BED| = 180° - \delta$ (z własności kątów przyległych).

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE| = 360°$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w czworokącie *ABED*), stąd $\alpha + \beta + 180° - \delta + 180° - \delta = 360°$. Zatem $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$.

Z powyższych rozważań mamy $\beta - \gamma = \delta$ i $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkącie *CDE* i czworokącie *ABED*, np.: $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$ i $\alpha + \beta + 180° - \delta + 180° - \delta = 360°$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że $\beta - \gamma = \delta$ i $\frac{\alpha+\beta}{2} = \delta$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

# Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_n)$ określony dla $n \ge 1$, w którym $a_5 = 22$ oraz $a_{10} = 47$. Oblicz pierwszy wyraz $a_1$ i różnicę $r$ tego ciągu.

**Rozwiązanie**

Wykorzystując wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego zapisujemy piąty i dziesiąty wyraz tego ciągu w zależności od wyrazu pierwszego $a_1$ i różnicy $r$: $a_5 = a_1 + 4r$ i $a_{10} = a_1 + 9r$.

Zapisujemy układ równań, np.: $\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$.

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu $a_1$ i różnicę $r$: $a_1 = 2$ i $r = 5$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze układ równań z niewiadomymi $a_1$ i $r$: $\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu $a_1$ i różnicę $r$: $a_1 = 2$ oraz $r = 5$.

# Zadanie 32. (0–5)

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B.
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B.

**Rozwiązanie I sposób**

Przyjmujemy oznaczenia $v$ i $t$ – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Lidii.
Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Lidii: $v \cdot t = 450$.
Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pani Danuty: $v-18$, $t+\frac{5}{4}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} v\cdot t = 450 \\ (v-18)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy

<table>
<tr><td>$t=\frac{450}{v}$</td><td>$v=\frac{450}{t}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy</td></tr>
<tr><td>$(v-18)\cdot\left(\frac{450}{v}+\frac{5}{4}\right)=450$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2-18v-6480=0$.<br>$\Delta=324+25920=162^2$<br>$v_1=\frac{18-162}{2}=-72$, sprzeczne z zał.<br>$v>0$<br>$v_2=\frac{18+162}{2}=90\,(\text{km/h})$<br>obliczamy prędkość drugiej pani<br>$v-18=72\,(\text{km/h})$</td><td>$\left(\frac{450}{t}-18\right)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $4t^2+5t-125=0$.<br>$\Delta=25+2000=45^2$<br>$t_1=\frac{-5-45}{8}=-\frac{50}{8}$, sprzeczne z zał. $t>0$<br>$t_2=\frac{-5+45}{8}=5\,(\text{h})$<br>obliczamy prędkość pani Lidii<br>$v=\frac{450}{5}=90\,(\text{km/h})$<br>obliczamy prędkość drugiej pani<br>$v-18=72\,(\text{km/h})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).</td></tr>
</table>

**Rozwiązanie II sposób**

Przyjmujemy oznaczenia $v$ i $t$ – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Danuty.
Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Danuty: $v \cdot t = 450$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Lidii: $v+18$, $t-\frac{5}{4}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} (v+18)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450 \\ v\cdot t=450 \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy

| | |
|---|---|
| $t=\frac{450}{v}$ | $v=\frac{450}{t}$ |
| podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy | |
| $(v+18)\cdot\left(\frac{450}{v}-\frac{5}{4}\right)=450$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2+18v-6480=0$.<br>$\Delta=324+25920=162^2$<br>$v_1=\frac{-18-162}{2}=-90$, sprzeczne z zał.<br>$v>0$<br>$v_2=\frac{-18+162}{2}=72\,(\text{km/h})$<br>obliczamy prędkość pani Lidii<br>$v+18=90\,(\text{km/h})$ | $\left(\frac{450}{t}+18\right)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $4t^2-5t-125=0$.<br>$\Delta=25+2000=45^2$<br>$t_1=\frac{5-45}{8}=-5$, sprz. z zał. $t>0$<br>$t_2=\frac{5+45}{8}=6\frac{1}{4}$ (h)<br>obliczamy prędkość pani Danuty<br>$v=\frac{450}{6\frac{1}{4}}=72$ (km/h)<br>obliczamy prędkość pani Lidii<br>$v+18=90$ (km/h) |
| Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta). | |

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ................................................................................................ 1 p.**

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednej z pań oraz prędkości i czasu dla obu pań przy użyciu tych samych oznaczeń,

  np.: dla pani Lidii $v\cdot t=450$, czas pani Danuty $t+\frac{5}{4}$, prędkość pani Danuty $v-18$.

  lub: dla pani Danuty $v\cdot t=450$, czas pani Lidii $t-\frac{5}{4}$, prędkość pani Lidii $v+18$.

**Uwaga**

Nie wymagamy opisania oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 p.**

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi $v$ i $t$ – odpowiednio z prędkością i czasem dla pani Lidii: $\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v-18)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450 \end{cases}$.

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi $v$ i $t$ – odpowiednio z prędkością i czasem dla pani Danuty: $\begin{cases} (v+18)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450 \\ v \cdot t = 450 \end{cases}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....................................................................... 3 p.**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$(v-18)\cdot\left(\frac{450}{v}+\frac{5}{4}\right)=450$ lub $\left(\frac{450}{t}-18\right)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450$, lub $(v+18)\cdot\left(\frac{450}{v}-\frac{5}{4}\right)=450$,

lub $\left(\frac{450}{t}+18\right)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450$.

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ......................................................... 4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą $v$ z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie drugiej prędkości

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą $t$ bezbłędnie i nieobliczenie prędkości obu pań

albo

- obliczenie $t$ z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu pań.

**Rozwiązanie pełne ............................................................................................................ 5 p.**

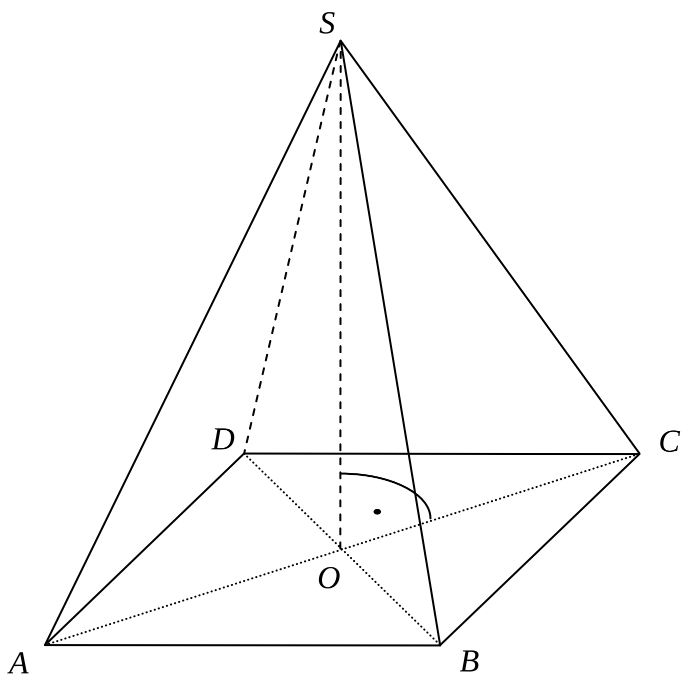
Obliczenie prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h.

**Uwagi**

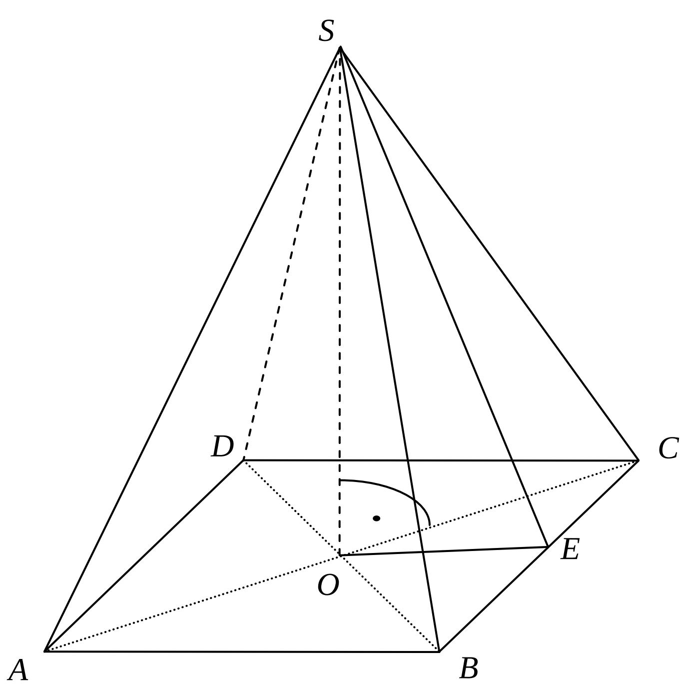
1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) jedną prędkość: 90 km/h lub 72 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h, to otrzymuje **1 pkt**.
3. Jeżeli zdający pokonał zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki, to może otrzymać **2 pkt** za całe rozwiązanie.

# Zadanie 33. (0–4)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.




**Rozwiązanie**




Niech $|ES| = h = 22$, $|AB| = a$, $|OE| = \frac{a}{2}$, $|SO| = H$.

Podany tangens kąta to stosunek $\frac{|SO|}{|OE|}$. Zatem $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Trójkąt *SOE* jest prostokątny. Zatem $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484$.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{cases}$.

1) Obliczamy z pierwszego równania *H*: $5H = 2\sqrt{6}a$, czyli $H = \frac{2\sqrt{6}}{5}a$.
2) Podstawiamy wyznaczoną wartość do równania stopnia drugiego i otrzymujemy równanie: $\frac{121}{100}a^2 = 484$ .
3) Obliczamy *a* (długość krawędzi podstawy): $a = 20$.
4) Obliczamy *H* (wysokość ostrosłupa): $H = 8\sqrt{6}$ .
5) Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 8\sqrt{6}$ .

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$ .

## Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................................ 1 p.**

Zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, wynikającej z podanej wartości tangensa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..................................................................... 2 p.**

Zapisanie dwóch zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, pozwalających na wyznaczenie obu tych wielkości:

np. zapisanie układu równań $\begin{cases} \dfrac{H}{\frac{a}{2}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{5} \\ H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{cases}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .................................................................... **3 p.**

Obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa: $a = 20$ i $H = 8\sqrt{6}$ .

**Rozwiązanie pełne** ............................................................................................................ **4 p.**

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$ .

# Zadanie 34. (0–4)

Zbiór *M* tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, w zapisie których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru *M* losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

<u>**I sposób rozwiązania**</u> (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są liczby ze zbioru *M*. Możemy je utożsamiać z ciągami $(a,b)$, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5\cdot 4 = 20$.

Niech *A* oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Zdarzeniu temu sprzyjają zdarzenia elementarne $(a,b)$ takie, że $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$ . Zatem liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* jest równa $|A| = 3+2+1 = 6$ .

Łatwo możemy tez zapisać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*, czyli

$$A = \{(2,3),(2,4),(2,5),$$
$$(3,4),(3,5),$$
$$(4,5)\}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest zatem równe

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ...........................................................................................................**1 pkt**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$

albo

- opisze zdarzenie sprzyjające np. w postaci $(a,b)$, gdzie $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................2 pkt**

Zdający

- opisze zdarzenie sprzyjające np. w postaci $(a,b)$, gdzie $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$ i obliczy ich liczbę: $|A| = 6$

albo

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$ i opisze zdarzenie sprzyjające np. w postaci $(a,b)$, gdzie $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$

albo

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu: $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,5)$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .........................................................................3 pkt**

Zdający obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$ oraz opisze zdarzenia sprzyjające zdarzeniu *A*, np. w postaci $(a,b)$ takie, że $a \in \{2,3,4,5\}$, gdzie $a < b$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 6$.

**Rozwiązanie pełne ..................................................................................................................4 pkt**

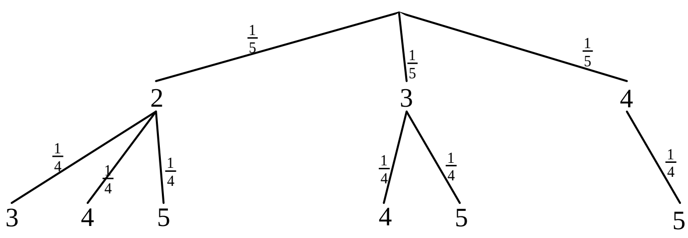
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = \dfrac{3}{10}$.

<u>**Uwagi**</u>

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia sprzyjające opuści <u>przez nieuwagę</u> jedno z nich, ale z zapisu wynika, że rozumie istotę doświadczenia i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające, ale popełni błąd przy ich zliczaniu to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

<u>**II sposób rozwiązania**</u> (metoda drzewa)

Niech *A* oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Sporządźmy drzewko ilustrujące nasze doświadczenie losowe. Drzewko ograniczymy tylko do jego istotnych gałęzi. Prawdopodobieństwo na kolejnych odcinkach tego drzewa jest równe odpowiednio $\frac{1}{5}$ oraz $\frac{1}{4}$. Zaznaczmy te gałęzie drzewka, które odpowiadają zajściu zdarzenia *A*.



Korzystając ze sporządzonego drzewa obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$

$$P(A)=6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{10}.$$

**<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................1 pkt**

Zdający narysuje drzewo ilustrujące „losowanie” kolejno dwóch różnych cyfr ze zbioru $M$ i przynajmniej na jednym odcinku gałęzi zapisze prawdopodobieństwo.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ......................................................2 pkt**

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania....................................................3 pkt**

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami, przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające.

**Rozwiązanie pełne .............................................................................................4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$: $P(A)=\frac{3}{10}$.

**<u>Uwagi</u>**

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający opuści <u>przez nieuwagę</u> jedną gałąź (z rysunku będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia) i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający narysuje wszystkie istotne gałęzie, ale popełni błąd przy ich zliczaniu i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.