



**CENTRALNA  
KOMISJA  
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2016**

## Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	A	D

### Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		D	A
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).		

### Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		A	B
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).		

### Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		A	D
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).		

### Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		C	D
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).		

**Zadanie 6. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>A</b>

**Zadanie 7. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 8. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 9. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$ , $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.8).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 10. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – zbiór wartości (4.3).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 11. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą (4.3).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 12. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>D</b>

**Zadanie 13. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (6.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 14. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

**Zadanie 15. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>C</b>

**Zadanie 16. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 17. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.5).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>B</b>

**Zadanie 18. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający ustala możliwość zbudowania trójkąta (SP9.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 19. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 20. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 21. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.6).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 22. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>B</b>

**Zadanie 23. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i stożkach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.3).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 24. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 25. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 26. (0–2)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia (1.7).
----------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązanie**

Obliczamy średni roczny przyrost sosny:  $\bar{x} = 8\frac{1}{3}$ .

Obliczamy błąd względny przybliżenia:  $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{25}} = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

- gdy obliczy średni roczny przyrost wysokości sosny:  $\bar{x} = 8\frac{1}{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- gdy otrzyma średni roczny przyrost wysokości sosny będący liczbą spełniającą nierówność  $7 < \bar{x} < 8,2(3)$  lub nierówność  $8,4(3) < \bar{x} < 10$  i konsekwentnie obliczy błąd względny otrzymanego przybliżenia.

*Uwaga:*

Akceptujemy wynik przybliżony z przedziału  $\langle 8,2(3); 8,4(3) \rangle$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy błąd względny przybliżenia: 4%.

**Zadanie 27. (0–2)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).
----------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na ustaleniu pierwiastków trójmianu kwadratowego. Drugi etap polega na ustaleniu zbioru rozwiązań nierówności.

## Realizacja pierwszego etapu

### I sposób

Redukujemy wyrazy podobne i zapisujemy nierówność w postaci równoważnej

$$-x^2 + 2x > 0.$$

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $-x^2 + 2x$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 4 \text{ i stąd } x_1 = \frac{-2 - 2}{-2} = 2 \text{ oraz } x_2 = \frac{-2 + 2}{-2} = 0$$

albo

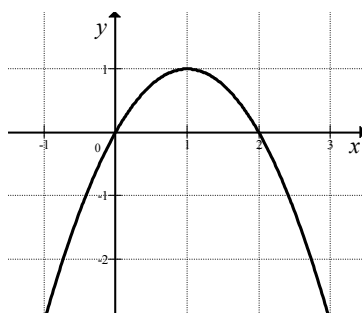
- wykorzystujemy postać iloczynową trójmianu  $-x^2 + 2x$ :  
 $-x(x-2) = 0$ , stąd  $x_1 = 0$  oraz  $x_2 = 2$ ,

albo

- stosujemy wzory Viète'a:  
 $x_1 \cdot x_2 = 0$  oraz  $x_1 + x_2 = 2$ , stąd  $x_1 = 0$  oraz  $x_2 = 2$ ,

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  lub zaznaczając je na wykresie



### II sposób

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego  $-x^2 + 2x$  i zapisujemy nierówność w postaci równoważnej, np.

$$-(x-1)^2 + 1 > 0.$$

Stąd

$$-((x-1)^2 - 1) > 0.$$

Następnie przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej

$$(x-1)^2 < 1,$$
$$|x-1| < 1.$$

## Realizacja drugiego etapu

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(0, 2)$  lub  $x \in (0, 2)$ .

## Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... **1 p.**

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, tzn. ustali pierwiastki trójmianu kwadratowego i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.:

- o obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- o zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = -x^2 + 2x$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- o zapisze nierówność  $|x-1| < 1$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- przy realizacji pierwszego etapu rozwiązania popełni błąd (ten sam błąd popełniony wielokrotnie traktuje się jak jeden błąd), ale otrzyma dwa różne pierwiastki, i konsekwentnie rozwiąże nierówność, np.:
  - o popełni błędy przy wyznaczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie rozwiąże nierówność,
  - o błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.  $x_1 + x_2 = -2$  i konsekwentnie rozwiąże nierówność,
  - o błędnie zapisze nierówność, np.  $|x-1| > 1$  i konsekwentnie ją rozwiąże.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

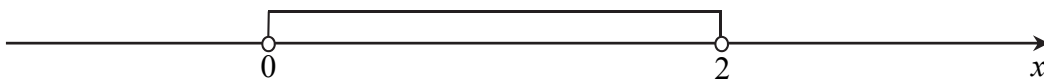
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(0, 2)$  lub  $x \in (0, 2)$ , lub  $x > 0$  i  $x < 2$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > 0$ ,  $x < 2$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np.  $(2, 0)$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x-2$  lub przez  $x$ , bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x-2$ , rozważając przy tym dwa przypadki  $x > 2$  i  $x < 2$ , rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków oraz wyznaczy poprawny zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 28. (0–2)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).
-----------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązanie**

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników  $4-x$  oraz  $x^2+2x-15$ . Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli

$$4-x=0 \text{ lub } x^2+2x-15=0.$$

Rozwiązaniem równania  $4-x=0$  jest  $x=4$ .

Rozwiązania równania  $x^2+2x-15=0$  możemy wyznaczyć, korzystając:

- ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 = 8^2, \quad x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5, \quad x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3$$

albo

- ze wzorów Viète'a:

$$x_1 + x_2 = -2 \text{ oraz } x_1 \cdot x_2 = -15 \text{ i stąd } x_1 = -5, \quad x_2 = 3,$$

albo

- z postaci iloczynowej trójmianu  $x^2+2x-15$

$$(x+5)(x-3)=0, \text{ stąd } x_1 = -5, \quad x_2 = 3,$$

albo

- z własności wartości bezwzględnej, przekształcając najpierw równanie do postaci równoważnej  $|x+1|=4$ , skąd  $x+1=4$  lub  $x+1=-4$ , czyli  $x=3$  lub  $x=-5$ .

Zatem wszystkie rozwiązania równania to:  $x=4$  lub  $x=-5$ , lub  $x=3$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zapisze dwa równania:  $4-x=0$  i  $x^2+2x-15=0$  (wystarczy, że z rozwiązania wynika, że zdający wyznacza pierwiastki każdego z wielomianów:  $4-x$ ,  $x^2+2x-15$ )

albo

- zapisze rozwiązanie  $x=4$ ,

albo

- obliczy co najmniej jeden pierwiastek trójmianu  $x^2+2x-15$ :  $x=-5$ ,  $x=3$ ,

albo

- wyznaczy jeden z pierwiastków wielomianu  $-x^3+2x^2+23x-60$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x=-5$ ,  $x=3$ ,  $x=4$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający obliczy trzy pierwiastki, ale w odpowiedzi końcowej podaje tylko dwa, to otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania bez stosownego założenia przez  $x - 4$  lub przez drugi czynnik i oblicza pierwiastki (lub pierwiastek) dla pozostałej części, to otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 29. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).
--------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Niech  $|\sphericalangle ACB| = \alpha$ .

Ponieważ  $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$ .

W  $\triangle CDE$ :  $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$ .

Trójkąt  $CDE$  jest prostokątny oraz  $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$ .

Podobnie trójkąt  $BFG$  jest prostokątny i  $|\sphericalangle FGB| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle BFG| = \alpha$ .

Ponieważ trójkąty  $CDE$  i  $BFG$  mają równe kąty, więc na podstawie cechy podobieństwa  $kkk$  są podobne.

#### II sposób

Niech  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$  i  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$ .

Trójkąt  $CED$  jest podobny do trójkąta  $ABC$  (cecha  $kkk$ ), bo  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DEC| = 90^\circ$ .

Podobnie trójkąt  $GBF$  jest podobny do trójkąta  $ABC$ , (cecha  $kkk$ ), bo  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$  oraz  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FGB| = 90^\circ$ .

Stąd trójkąt  $CED$  jest podobny do trójkąta  $FBG$  (z przechodniości relacji podobieństwa).

### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... **1 p.**  
gdy

- wskaże w dwóch trójkątach spośród trójkątów  $CBA$ ,  $CDE$  i  $FBG$  jedną parę równych kątów ostrych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, przy czym kąt przy wierzchołku  $B$  musi być wskazany dwukrotnie, jako kąt w obu trójkątach  $CBA$  i  $FBG$ , np. zdający zapisze  $|\sphericalangle FBG| = |\sphericalangle CBA|$  lub stwierdzi, że jest to wspólny kąt trójkątów  $CBA$  i  $FBG$  (analogicznie z kątem przy wierzchołku  $C$  w trójkątach  $CBA$  i  $CDE$ )

albo

- zapisze, że trójkąt  $CBA$  jest podobny do trójkąta  $FBG$  i do trójkąta  $CDE$  i stąd wywnioskuje, że trójkąt  $CDE$  jest podobny do trójkąta  $FBG$ , ale nie wskaże żadnej pary równych kątów ostrych w tych trójkątach i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje**..... **2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający przyjmie konkretne miary kątów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający przyjmie błędne zależności między kątami, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 30. (0–2)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).
--------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązanie**

Rozważmy wyraz  $a_n = 2n^2 + 2n$ .

Wyraz  $a_{n+1}$  można zapisać, jako

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 6n + 4.$$

Wtedy

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = 4n^2 + 8n + 4.$$

Zatem

$$a_n + a_{n+1} = (2n+2)^2.$$

Liczba  $2n+2$  jest naturalna. To kończy dowód.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy poprawnie zapisze sumę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu, np.

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych wartości  $n$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 31. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym oraz wykorzystuje podstawowe własności potęg – również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką (1.6, 1.5).
--------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Zapisujemy równanie

$$6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}}.$$

Korzystamy z definicji logarytmu

$$10^{6,2} = \frac{A}{10^{-4}}.$$

Stąd

$$A = 10^{6,2} \cdot 10^{-4},$$

$$A = 10^{2,2}.$$

Stwierdzamy, że  $10^{2,2} > 10^2 = 100$ , gdyż funkcja wykładnicza  $y = 10^x$  jest rosnąca. Oznacza to, że  $A > 100$  cm.

II sposób

Zapisujemy równanie

$$6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}}.$$

To równanie jest równoważne kolejno równaniom

$$6,2 = \log(10^4 A),$$

$$6,2 = \log 10^4 + \log A,$$

$$6,2 = 4 + \log A.$$

Zatem  $2,2 = \log A$ . Korzystamy z definicji logarytmu i otrzymujemy równość

$$A = 10^{2,2}.$$

Stwierdzamy, że  $10^{2,2} > 10^2 = 100$ , gdyż funkcja wykładnicza  $y = 10^x$  jest rosnąca. Oznacza to, że  $A > 100$  cm.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- wykorzysta definicję logarytmu i przekształci równanie  $6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}}$  do postaci

$$10^{6,2} = \frac{A}{10^{-4}}$$

albo

- wykorzysta własność logarytmu i przekształci równanie  $6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}}$  do postaci

$$6,2 = \log A - \log 10^{-4} \text{ lub } 6,2 = \log A + \log 10^4$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

gdy zapisze, że  $A = 10^{2,2}$  i stwierdzi, że amplituda tego trzęsienia ziemi była większa od 100 cm.

**Zdający otrzymuje..... 2 p.**

*Uwagi:*

- Jeżeli zdający błędnie interpretuje treść zadania, w szczególności stosuje niepoprawne podstawienie do wzoru, to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający nie obliczy amplitudy, ale uzasadni, że amplituda jest większa od 100 cm, to otrzymuje **1 punkt**.
- Jeżeli zdający nie obliczy amplitudy tylko zapisze bez uzasadnienia, że amplituda jest większa od 100 cm, to otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 32. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta (SP9.3). G7. Równania. Zdający rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą (G7.3).
-----------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Niech  $\alpha$  oznacza najmniejszy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są  $\alpha + 50^\circ$  oraz  $3\alpha$ . Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\begin{aligned}\alpha + 3\alpha + \alpha + 50^\circ &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 130^\circ, \\ \alpha &= 26^\circ.\end{aligned}$$

Stąd  $\alpha + 50^\circ = 76^\circ$  oraz  $3\alpha = 78^\circ$ .

#### II sposób

Niech  $\alpha$  oznacza największy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są  $\frac{\alpha}{3} + 50^\circ$  oraz  $\frac{\alpha}{3}$ . Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 50^\circ + \alpha &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 390^\circ, \\ \alpha &= 78^\circ.\end{aligned}$$

Stąd  $\frac{\alpha}{3} = 26^\circ$  oraz  $\frac{\alpha}{3} + 50^\circ = 76^\circ$ .

### III sposób

Niech  $\alpha$  oznacza ten kąt trójkąta, który nie jest ani największy, ani najmniejszy. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są  $\alpha - 50^\circ$  oraz  $3(\alpha - 50^\circ)$ . Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\begin{aligned}\alpha - 50^\circ + \alpha + 3(\alpha - 50^\circ) &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 380^\circ, \\ \alpha &= 76^\circ.\end{aligned}$$

Stąd  $\alpha - 50^\circ = 26^\circ$  oraz  $3(\alpha - 50^\circ) = 78^\circ$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający zapisze:

- kąty trójkąta w zależności od jednego kąta, np.:

$$\alpha, \alpha + 50^\circ, 3\alpha \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3} + 50^\circ, \alpha, \quad \text{lub} \quad \alpha - 50^\circ, \alpha, 3(\alpha - 50^\circ)$$

albo

- układ dwóch równań, np.

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ \\ \beta = 3\alpha, \end{cases}$$

albo

- układ trzech równań, np.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma = 3\alpha \\ \beta = \alpha + 50^\circ \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\alpha + 3\alpha + \alpha + 50^\circ = 180^\circ \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 50^\circ + \alpha = 180^\circ, \quad \text{lub} \quad \alpha - 50^\circ + \alpha + 3(\alpha - 50^\circ) = 180^\circ$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający obliczy jeden z kątów trójkąta, np.:  $\alpha = 26^\circ$  lub  $\alpha = 78^\circ$ , lub  $\alpha = 76^\circ$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 4 p.**

Zdający obliczy wszystkie kąty trójkąta.

*Uwagi:*

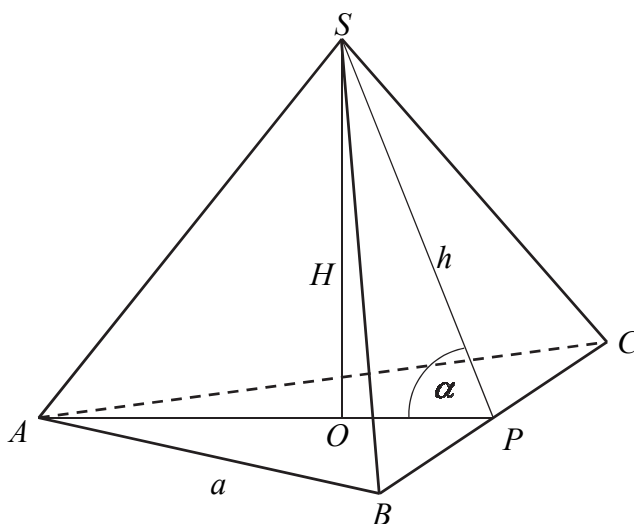
1. Jeżeli zdający tylko poda kąty ( $26^\circ, 76^\circ, 78^\circ$ ), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający tylko poda kąty i sprawdzi wszystkie warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 33. (0–5)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).
-----------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązanie**

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ wysokość tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy, to  $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Objętość ostrosłupa jest równa 27, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 27,$$

skąd otrzymujemy  $a = 6$ .

Wysokość ostrosłupa jest równa

$$H = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym  $ABC$ , zatem długość odcinka  $PO$  stanowi  $\frac{1}{3}$  wysokości trójkąta  $ABC$ , czyli

$$|OP| = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta  $POS$  otrzymujemy

$$h^2 = |OP|^2 + H^2,$$

$$h^2 = (\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2,$$

$$h^2 = 30.$$

Stąd

$$h = \sqrt{30}.$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem równe

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} ah = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{30} = 9\sqrt{30}.$$

Cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy

$$\cos \alpha = \frac{|OP|}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający:

- zapisze równanie, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 27$$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć wysokość ostrosłupa:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2H}{\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 27$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa  $a = 6$  lub wysokość ostrosłupa  $H = 3\sqrt{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

*Uwaga:*

Zdający może obliczyć od razu tangens kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{1}{3}H} = 3,$$

a następnie obliczyć szukaną wartość cosinusa tego kąta:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Otrzymuje wtedy **2 punkty**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający obliczy

- wysokość ściany bocznej ostrosłupa:  $\sqrt{30}$

albo

- długość krawędzi bocznej ostrosłupa:  $\sqrt{39}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne.....4 p.**

Zdający obliczy:

- pole powierzchni bocznej ostrosłupa  $ABCS$ :  $9\sqrt{30}$
- albo
- cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

**Rozwiązanie pełne .....5 p.**

Zdający obliczy pole powierzchni bocznej ostrosłupa  $ABCS$ :  $9\sqrt{30}$  i cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy:  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż podana w zadaniu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający popęlni błąd merytoryczny np. w zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa przy obliczaniu wysokości ściany bocznej lub w interpretacji własności trójkąta równobocznego, to otrzymuje za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
3. Akceptujemy poprawne przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.

**Zadanie 34. (0–4)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).
--------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para  $(x, y)$  dwóch różnych liczb ze zbioru  $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ , który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 90 \cdot 89$ . Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30.

Zatem zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(10, 20)$ ,  $(11, 19)$ ,  $(12, 18)$ ,  $(13, 17)$ ,  $(14, 16)$ ,  $(16, 14)$ ,  $(17, 13)$ ,  $(18, 12)$ ,  $(19, 11)$ ,  $(20, 10)$ .

Ich liczba jest równa  $|A| = 10$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe  $\frac{1}{801}$ .

### II sposób

Zdarzeniem elementarnym jest zbiór dwuelementowy  $\{x, y\}$  dwóch różnych liczb ze zbioru  $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ , który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = \binom{90}{2} = \frac{90!}{88! \cdot 2!} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$ . Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$$\{10, 20\}, \{11, 19\}, \{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\}.$$

Ich liczba jest równa  $|A| = 5$ .

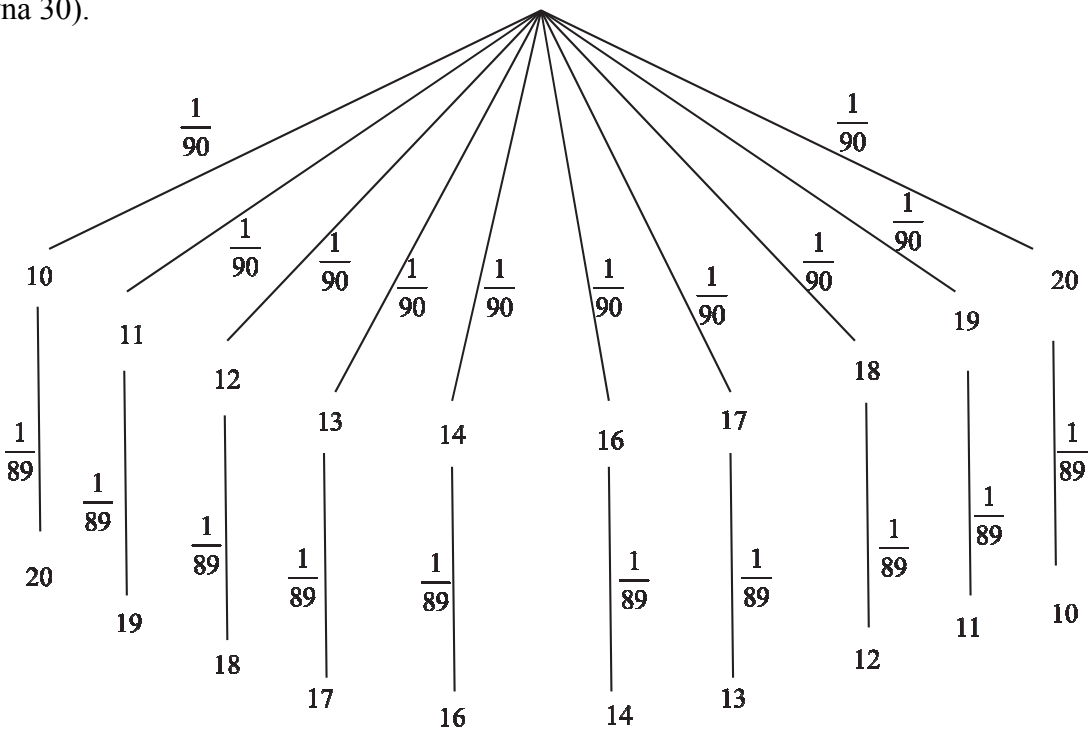
Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{45 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe  $\frac{1}{801}$ .

### III sposób

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu  $A$  (polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30).



Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = 10 \cdot \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe  $\frac{1}{801}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze**

**do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :

$$(10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), (16, 14),$$

$$(17, 13), (18, 12), (19, 11), (20, 10)$$

$$\text{lub } \{10, 20\}, \{11, 19\}, \{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\},$$

albo

- zapisze, że  $|A| = 10$  lub  $|A| = 5$ ,

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :

$$(10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), (16, 14),$$

$$(17, 13), (18, 12), (19, 11), (20, 10)$$

$$\text{lub } \{10, 20\}, \{11, 19\}, \{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\}$$

albo

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz zapisze, że  $|A| = 10$  lub  $|A| = 5$ ,

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 90 \cdot 89$  lub  $|\Omega| = \binom{90}{2}$ , lub  $|\Omega| = \frac{90 \cdot 89}{2}$ , lub  $|\Omega| = 4005$ ,

albo

- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 p.**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 90 \cdot 89$  oraz zapisze, że  $|A| = 10$  albo
  - obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{90}{2}$  lub  $|\Omega| = \frac{90 \cdot 89}{2}$ , lub  $|\Omega| = 4005$  oraz zapisze, że  $|A| = 5$ ,
- albo
- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi narysowanego drzewa:  
 $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne .....4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{801}$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający błędnie zapisze, że wszystkich liczb dwucyfrowych jest 89 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli w rozwiązaniu występuje sprzeczność modeli probabilistycznych, to zdający może otrzymać, co najwyżej **2 punkty**.
4. Akceptujemy sytuacje, gdy zdający zamiast wypisywania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  zapisze następujące sumy  $10+20$ ,  $11+19$ ,  $12+18$ ,  $13+17$ ,  $14+16$ ,  $16+14$ ,  $17+13$ ,  $18+12$ ,  $19+11$ ,  $20+10$  (lub tylko  $10+20$ ,  $11+19$ ,  $12+18$ ,  $13+17$ ,  $14+16$ ).
5. Jeżeli zdający zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, ale przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , zapisuje sumę  $15+15$  i na tym zakończy to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający bez żadnych obliczeń poda tylko wynik, np.  $\frac{1}{801}$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.