

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA DO 2014  
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2016**

## Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>D</b>

### Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

### Zadanie 3. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

### Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$ (2.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>D</b>

### Zadanie 5. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (2.e).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 6. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>A</b>

**Zadanie 7. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 8. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 9. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$ , $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.e).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 10. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji zbiór wartości (4.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 11. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.k).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 12. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>D</b>

**Zadanie 13. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (7.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 14. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

**Zadanie 15. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>C</b>

**Zadanie 16. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 17. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>B</b>

**Zadanie 18. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 19. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 20. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 21. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.f).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 22. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>B</b>

**Zadanie 23. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 24. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 25. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 26. (0–2)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap rozwiązania:**

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 + 5x - 3$ .

- Obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 49 \text{ i stąd } x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3 \text{ oraz } x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2},$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2} \text{ oraz } x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}, \text{ stąd } x_1 = -3 \text{ oraz } x_2 = \frac{1}{2},$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub zaznaczając je na wykresie  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

**Drugi etap rozwiązania:**

Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku górze i zaznaczamy na osi  $Ox$  miejsca zerowe trójmianu.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$  lub  $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ ,

lub  $(x < -3 \text{ lub } x > \frac{1}{2})$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje .....1 p.**  
gdy:

- poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 + 5x - 3$ :  
 $x_1 = -3$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błędy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  lub  $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$   
lub  $(x < -3 \text{ lub } x > \frac{1}{2})$ .

albo

- sporządzi ilustrację graficzną (oś liczbowa, parabola) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < -3$ ,  $x > \frac{1}{2}$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

*Uwaga:*

Jeśli pierwiastki trójmianu są wyznaczone przy zastosowaniu błędnej metody, to za całe rozwiązanie zdający otrzymuje **0 punktów**.

### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Akceptujemy zapis przedziałów nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej lub błędów w przepisaniu, np.:  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (-3, +\infty)$  lub  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$ , lub  $(-\infty, 3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ .

### Zadanie 27. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).
--	--

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów  $x^2(x+3)+2(x+3)=0$  lub  $x(x^2+2)+3(x^2+2)=0$ , stąd  $(x+3)(x^2+2)=0$ .  
Ponieważ wyrażenie  $x^2+2$  jest dodatnie, więc  $x=-3$ .

#### II sposób

Stwierdzamy, że liczba  $-3$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3+3x^2+2x+6$ . Dzielimy ten wielomian przez dwumian  $(x+3)$  i otrzymujemy iloraz  $(x^2+2)$ . Mamy więc równanie postaci  $(x+3)(x^2+2)=0$ , a stąd otrzymujemy  $x=-3$ .

### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje .....1 p.**

- gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynowej, np.:  $(x+3)(x^2+2)=0$

albo

- gdy podzieli wielomian  $x^3+3x^2+2x+6$  przez dwumian  $(x+3)$ , otrzyma iloraz  $(x^2+2)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy wyznaczy rozwiązanie równania:  $x=-3$ .

**Zadanie 28. (0–2)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Trygonometria. Zdający stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (6.c).
---	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

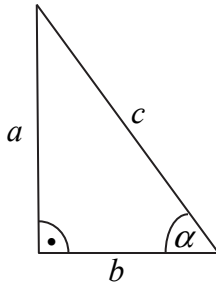
Przekształcamy wyrażenie  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$ , stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy i otrzymujemy  $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$ .

Korzystając z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , otrzymujemy  $1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{2}$ , a stąd

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}, \text{ a zatem } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}.$$

II sposób

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych  $a$  i  $b$  oraz zaznaczamy kąt ostry  $\alpha$  taki, że  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  lub  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ponieważ  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{3}{2}$ , więc  $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{3}{2}$ , czyli  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2} = \frac{3}{2}$ .

Stąd  $\frac{c^2 + 2ab}{c^2} = 1 + \frac{2ab}{c^2} = \frac{3}{2}$ , zatem  $\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{4}$ .

Ponieważ  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  i  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ , to  $\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{4}$ . Zatem  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$ .

**Schemat punktowania**

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

- gdy przekształci wyrażenie  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$  do postaci  $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

albo

- gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości  $a$  i  $b$ , zaznaczy w tym trójkącie kąt  $\alpha$  i zapisze  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$  oraz  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje..... 2 p.**

gdy obliczy, że  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$ .

*Uwaga:*

Jeżeli zdający błędnie wyznaczy funkcje trygonometryczne do kąta wskazanego na rysunku i z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 29. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).
--------------------------------	---

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Niech  $|\sphericalangle ACB| = \alpha$ .

Ponieważ  $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$ .

W  $\triangle CDE$ :  $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$ .

Trójkąt  $CDE$  jest prostokątny oraz  $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$ .

Podobnie trójkąt  $BFG$  jest prostokątny i  $|\sphericalangle FGB| = 90^\circ$ , więc  $|\sphericalangle BFG| = \alpha$ .

Ponieważ trójkąty  $CDE$  i  $BFG$  mają równe kąty, więc na podstawie cechy podobieństwa  $kkk$  są podobne.

#### II sposób

Niech  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$  i  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$ .

Trójkąt  $CED$  jest podobny do trójkąta  $ABC$  (cecha  $kkk$ ), bo  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DEC| = 90^\circ$ .

Podobnie trójkąt  $GBF$  jest podobny do trójkąta  $ABC$ , (cecha  $kkk$ ), bo  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$  oraz  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FGB| = 90^\circ$ .

Stąd trójkąt  $CED$  jest podobny do trójkąta  $FBG$  (z przechodniości relacji podobieństwa).

### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy

- wskaże w dwóch trójkątach spośród trójkątów  $CBA$ ,  $CDE$  i  $FBG$  jedną parę równych kątów ostrych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, przy czym kąt przy wierzchołku  $B$  musi być wskazany dwukrotnie, jako kąt w obu trójkątach  $CBA$  i  $FBG$ , np. zdający zapisze  $|\sphericalangle FBG| = |\sphericalangle CBA|$  lub stwierdzi, że jest to wspólny kąt trójkątów  $CBA$  i  $FBG$  (analogicznie z kątem przy wierzchołku  $C$  w trójkątach  $CBA$  i  $CDE$ )

albo

- zapisze, że trójkąt  $CBA$  jest podobny do trójkąta  $FBG$  i do trójkąta  $CDE$  i stąd wywnioskuje, że trójkąt  $CDE$  jest podobny do trójkąta  $FBG$ , ale nie wskaże żadnej pary równych kątów ostrych w tych trójkątach

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmie konkretne miary kątów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający przyjmie błędne zależności między kątami, to otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 30. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$ (2.a).
--------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązanie

Rozważmy wyraz  $a_n = 2n^2 + 2n$ .

Wyraz  $a_{n+1}$  można zapisać, jako

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 6n + 4.$$

Wtedy

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = 4n^2 + 8n + 4.$$

Zatem

$$a_n + a_{n+1} = (2n+2)^2.$$

Liczba  $2n+2$  jest naturalna. To kończy dowód.

### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy poprawnie zapisze sumę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu, np:

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych wartości  $n$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 31. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Wykorzystujemy wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy

równanie z niewiadomą  $n$ :  $S_n = \frac{7+89}{2} \cdot n = 2016$ .

Obliczamy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego  $n$ :  $n = 42$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zapisze

- równanie z niewiadomą  $n$ :  $\frac{7+89}{2} \cdot n = 2016$

albo

- układ równań z niewiadomymi  $n$  i  $r$ : 
$$\begin{cases} 7 + (n-1)r = 89 \\ 2016 = \frac{2 \cdot 7 + (n-1)r}{2} \cdot n \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego: 42.

**Zadanie 32. (0–4)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).
-----------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Niech  $\alpha$  oznacza najmniejszy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są  $\alpha + 50^\circ$  oraz  $3\alpha$ . Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\begin{aligned}\alpha + 3\alpha + \alpha + 50^\circ &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 130^\circ, \\ \alpha &= 26^\circ.\end{aligned}$$

Stąd  $\alpha + 50^\circ = 76^\circ$  oraz  $3\alpha = 78^\circ$ .

II sposób

Niech  $\alpha$  oznacza największy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są  $\frac{\alpha}{3} + 50^\circ$  oraz  $\frac{\alpha}{3}$ .

Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 50^\circ + \alpha &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 390^\circ, \\ \alpha &= 78^\circ.\end{aligned}$$

Stąd  $\frac{\alpha}{3} = 26^\circ$  oraz  $\frac{\alpha}{3} + 50^\circ = 76^\circ$ .

III sposób

Niech  $\alpha$  oznacza ten kąt trójkąta, który nie jest ani największy, ani najmniejszy. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są  $\alpha - 50^\circ$  oraz  $3(\alpha - 50^\circ)$ . Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\begin{aligned}\alpha - 50^\circ + \alpha + 3(\alpha - 50^\circ) &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 380^\circ, \\ \alpha &= 76^\circ.\end{aligned}$$

Stąd  $\alpha - 50^\circ = 26^\circ$  oraz  $3(\alpha - 50^\circ) = 78^\circ$ .

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający zapisze:

- kąty trójkąta w zależności od jednego kąta, np.:

$$\alpha, \alpha + 50^\circ, 3\alpha \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3} + 50^\circ, \alpha, \quad \text{lub} \quad \alpha - 50^\circ, \alpha, 3(\alpha - 50^\circ)$$

albo

- układ dwóch równań, np.

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ \\ \beta = 3\alpha, \end{cases}$$

albo

- układ trzech równań, np.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma = 3\alpha \\ \beta = \alpha + 50^\circ \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\alpha + 3\alpha + \alpha + 50^\circ = 180^\circ \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 50^\circ + \alpha = 180^\circ, \quad \text{lub} \quad \alpha - 50^\circ + \alpha + 3(\alpha - 50^\circ) = 180^\circ$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy jeden z kątów trójkąta, np.:  $\alpha = 26^\circ$  lub  $\alpha = 78^\circ$ , lub  $\alpha = 76^\circ$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy wszystkie kąty trójkąta.

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający tylko poda kąty ( $26^\circ$ ,  $76^\circ$ ,  $78^\circ$ ), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający tylko poda kąty i sprawdzi wszystkie warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 33. (0–5)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych (3.b).
-----------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmujemy oznaczenia:

$x$  – początkowa liczba osób planujących wyjazd, gdzie  $x$  jest liczbą naturalną dodatnią;

$y$  – początkowy koszt wynajęcia busa przypadający na jednego uczestnika biwaku,  $y > 16$ .

Zapisujemy zależność między ostateczną liczbą osób uczestniczących w wyjeździe, a ostatecznym jednostkowym kosztem wynajęcia busa, np.:  $(x + 2) \cdot (y - 16) = 960$ .

Zapisujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} x \cdot y = 960 \\ (x + 2) \cdot (y - 16) = 960 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y = \frac{960}{x},$	$x = \frac{960}{y},$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x + 2) \cdot \left( \frac{960}{x} - 16 \right) = 960.$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.: <math>x^2 + 2x - 120 = 0</math>.</p> <p>Obliczamy <math>\Delta = 4 + 480 = 22^2</math>,</p> $x_1 = \frac{-2 - 22}{2} = -12, \text{ co jest sprzeczne}$ <p>z założeniem <math>x &gt; 0</math>,</p> $x_2 = \frac{-2 + 22}{2} = 10.$ <p>Obliczamy liczbę osób, które wyjechały na biwak <math>x + 2 = 12</math>.</p>	$\left( \frac{960}{y} + 2 \right) \cdot (y - 16) = 960.$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.: <math>y^2 - 16y - 7680 = 0</math>.</p> <p>Obliczamy <math>\Delta = 256 + 30720 = 176^2</math>,</p> $y_1 = \frac{16 - 176}{2} = -80, \text{ co jest sprzeczne}$ <p>z założeniem <math>y &gt; 16</math>,</p> $y_2 = \frac{16 + 176}{2} = 96.$ <p>Obliczamy początkową liczbę osób planujących wyjazd</p> $x = \frac{960}{96} = 10 \text{ oraz}$ <p>obliczamy liczbę osób, które wyjechały na biwak <math>x + 2 = 12</math>.</p>
Odpowiedź: Ostatecznie na biwak wyjechało 12 osób.	

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zapisanie zależności między ostateczną liczbą osób uczestniczących w wyjeździe, a jednostkowym kosztem wynajęcia busa, np.:  $(x+2) \cdot (y-16) = 960$ , gdzie  $x$  oznacza początkową liczbę osób planujących wyjazd, a  $y$  – jednostkowy początkowy koszt wynajęcia busa.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$  – odpowiednio z początkową liczbę osób planujących wyjazd i jednostkowym początkowym kosztem wynajęcia busa:

$$\begin{cases} x \cdot y = 960 \\ (x+2) \cdot (y-16) = 960. \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający sprowadzi układ równań do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$(x+2) \cdot \left( \frac{960}{x} - 16 \right) = 960 \text{ lub } \left( \frac{960}{y} + 2 \right) \cdot (y-16) = 960, \text{ lub } x^2 + 2x - 120 = 0, \\ \text{lub } y^2 - 16y - 7680 = 0.$$

*Uwaga:*

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 4 p.

Zdający

- rozwiąże równanie z niewiadomą  $x$  z błędem rachunkowym i konsekwentnie obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą  $x$  i nie obliczy liczby osób uczestniczących w biwaku,

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą  $y$  i nie obliczy liczby osób uczestniczących w biwaku,

albo

- obliczy  $y$  z błędem rachunkowym i konsekwentnie obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.

Zdający obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku: 12.

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający tylko poda rozwiązanie, to może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający założy, że koszt jest liczbą całkowitą, rozpatrzy rozkłady liczby 960 na iloczyn dwóch czynników, wśród których są rozkłady:

$$10 \cdot 96 = 960$$

$$12 \cdot 80 = 960$$

i poda poprawną odpowiedź, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

3. Jeżeli zdający przyjmie  $x$  jako liczbę osób, które ostatecznie pojechały na biwak i poda  $x + 2 = 14$ , to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.

#### **Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

1. Jeżeli zdający popełni błąd (np.:  $x_2 = \frac{2+22}{2} = 12$  lub rachunkowy) w wyznaczaniu pierwiastków równania kwadratowego, przy czym otrzyma przynajmniej jedno rozwiązanie naturalne i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać 5 punktów.
2. Jeżeli zdający otrzyma poprawne równanie wymierne, a następnie przekształci je z błędem do równania kwadratowego i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać 5 punktów, o ile otrzymane równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie naturalne.

**Zadanie 34. (0–4)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia, wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.b,d).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para  $(x, y)$  dwóch różnych liczb ze zbioru  $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ , który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 90 \cdot 89$ . Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), (16, 14), (17, 13), (18, 12), (19, 11), (20, 10)$ .

Ich liczba jest równa  $|A| = 10$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe  $\frac{1}{801}$ .

II sposób

Zdarzeniem elementarnym jest zbiór dwuelementowy  $\{x, y\}$  dwóch różnych liczb ze zbioru  $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ , który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = \binom{90}{2} = \frac{90!}{88! \cdot 2!} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$ . Wszystkie zdarzenia elementarne są równo

prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$\{10, 20\}, \{11, 19\}, \{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\}$ .

Ich liczba jest równa  $|A| = 5$ .

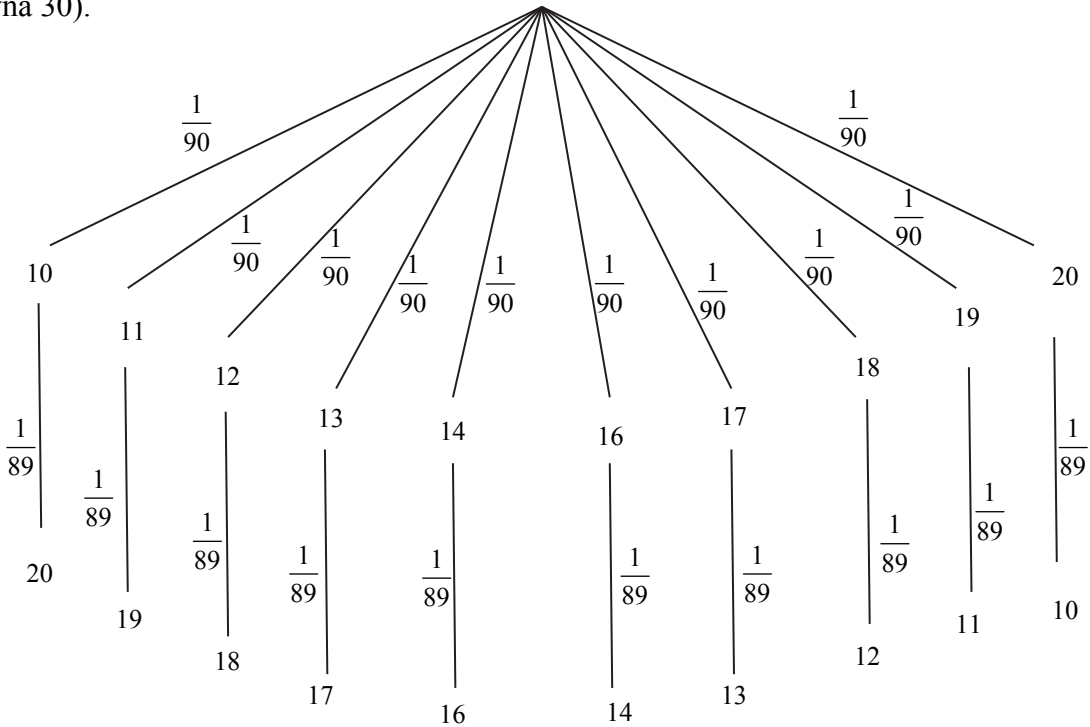
Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{45 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe  $\frac{1}{801}$ .

### III sposób

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu  $A$  (polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30).



Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = 10 \cdot \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe  $\frac{1}{801}$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :  
(10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), (16, 14), (17, 13), (18, 12), (19, 11),  
(20, 10)

lub  $\{10, 20\}$ ,  $\{11, 19\}$ ,  $\{12, 18\}$ ,  $\{13, 17\}$ ,  $\{14, 16\}$ ,

albo

- zapisze, że  $|A| = 10$  lub  $|A| = 5$ ,

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :  
(10,20), (11,19), (12,18), (13,17), (14,16), (16,14), (17,13), (18,12), (19,11),  
(20,10)  
lub  $\{10,20\}$ ,  $\{11,19\}$ ,  $\{12,18\}$ ,  $\{13,17\}$ ,  $\{14,16\}$

albo

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz zapisze, że  $|A|=10$  lub  $|A|=5$ ,

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega|=90 \cdot 89$  lub  $|\Omega|=\binom{90}{2}$ , lub  $|\Omega|=\frac{90 \cdot 89}{2}$ , lub  $|\Omega|=4005$ ,

albo

- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega|=90 \cdot 89$  oraz zapisze, że  $|A|=10$

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega|=\binom{90}{2}$  lub  $|\Omega|=\frac{90 \cdot 89}{2}$ , lub  $|\Omega|=4005$  oraz zapisze, że  $|A|=5$ ,

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi narysowanego drzewa:  
 $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{801}$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych

- sprzyjających zdarzeniu  $A$  i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający błędnie zapisze, że wszystkich liczb dwucyfrowych jest 89 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
  3. Jeżeli w rozwiązaniu występuje sprzeczność modeli probabilistycznych, to zdający może otrzymać, co najwyżej **2 punkty**.
  4. Akceptujemy sytuacje, gdy zdający zamiast wypisywania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  zapisze następujące sumy  $10+20$ ,  $11+19$ ,  $12+18$ ,  $13+17$ ,  $14+16$ ,  $16+14$ ,  $17+13$ ,  $18+12$ ,  $19+11$ ,  $20+10$  (lub tylko  $10+20$ ,  $11+19$ ,  $12+18$ ,  $13+17$ ,  $14+16$ ).
  5. Jeżeli zdający zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, ale przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , zapisuje sumę  $15+15$  i na tym zakończy to otrzymuje **1 punkt**.
  6. Jeżeli zdający bez żadnych obliczeń poda tylko wynik, np.  $\frac{1}{801}$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.