

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

**MATEMATYKA**

**POZIOM PODSTAWOWY**

**FORMUŁA DO 2014**

**(„STARA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2018**

## Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	<b>I</b>	<b>II</b>
		<b>B</b>	<b>D</b>

### Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki (1.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>A</b>

### Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

### Zadanie 4. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>A</b>

### Zadanie 5. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.f).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.e).	<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 6. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej (4.j).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 7. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.e).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 8. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji liniowych (4.e).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 9. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji kwadratowych (4.h).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 10. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej (4.f).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 11. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

**Zadanie 12. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 13. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 14. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych (6.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 15. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 16. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

**Zadanie 17. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>D</b>

**Zadanie 18. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (8.g).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 19. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 20. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 21. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 22. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych (9.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 23. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>D</b>

**Zadanie 24. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia (10.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 25. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

## Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

#### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 3x - 5$ .

**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązywania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci  $2x^2 - 3x - 5 > 0$  i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 3x - 5$ 
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:  
 $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$  i stąd  $x_1 = \frac{3-7}{4} = -1$  oraz  $x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$
- albo
  - stosujemy wzory Viète'a:  
 $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$  oraz  $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ , stąd  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = \frac{5}{2}$ .

Drugi etap rozwiązania: podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub

$x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ .

#### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązywania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = -1$  i  $x_2 = \frac{5}{2}$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale otrzyma nierówność, w której po jednej stronie występuje pełny trójmian kwadratowy posiadający dwa różne pierwiastki i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ ,  
lub  $x < -1 \vee x > \frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



### Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $x < -1$  i  $x > \frac{5}{2}$ ,  $x < -1$  oraz  $x > \frac{5}{2}$ , itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  i błędnie zapisze odpowiedź, np.  $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po poprawnym rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do zbioru  $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$  lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (-1, +\infty)$ ,  $(+\infty, \frac{5}{2}) \cup (-1, -\infty)$ , to przyznajemy **2 punkty**.

### Zadanie 27. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).
--	--

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów

$$x^2(x-7) - 4(x-7) = 0 \text{ lub } x(x^2-4) - 7(x^2-4) = 0$$

$$\text{Stąd } (x^2-4)(x-7) = 0, \text{ czyli } (x-2)(x+2)(x-7) = 0.$$

Zatem  $x = 2$  lub  $x = -2$ , lub  $x = 7$ .

## II sposób

Stwierdzamy, że liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ . Dzielimy wielomian przez dwumian  $x - 7$ . Otrzymujemy iloraz  $x^2 - 4$ . Zapisujemy równanie w postaci  $(x - 7)(x^2 - 4) = 0$ . Stąd  $(x - 7)(x - 2)(x + 2) = 0$ , czyli  $x = 2$  lub  $x = -2$ , lub  $x = 7$ .

### Uwaga

Zdający może ustalić, że pierwiastkiem wielomianu jest:

- liczba 2 i zapisać równanie w postaci  $(x - 2)(x^2 - 5x - 14) = 0$ ;
- liczba  $-2$  i zapisać równanie w postaci  $(x + 2)(x^2 - 9x + 14) = 0$ .

### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje .....1 p.**  
gdy

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $x - 7$ , otrzyma iloraz  $x^2 - 4$   
albo
- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $x - 2$ , otrzyma iloraz  $x^2 - 5x - 14$ ,
- albo
- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $x + 2$ , otrzyma iloraz  $x^2 - 9x + 14$ ,
- albo
- zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu:  
 $(x^2 - 4)(x - 7) = 0$  lub  $(x - 2)(x + 2)(x - 7) = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**  
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania:  $x = 2$ ,  $x = -2$ ,  $x = 7$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający w trakcie doprowadzania lewej strony równania do postaci iloczynu popełni więcej niż jedną usterkę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia (2.a).
--------------------------------	---

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{2}{a+b}.$$

Ponieważ liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie, więc  $a+b > 0$  i  $2ab > 0$ . Mnożąc obie strony nierówności przez  $2ab(a+b)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\geq 4ab, \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab, \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ (a-b)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

## II sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2ab} - \frac{2}{a+b} &\geq 0, \\ \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2ab(a+b)} &\geq 0.\end{aligned}$$

Ponieważ liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie, więc  $a+b > 0$  i  $2ab > 0$ . Mnożąc obie strony nierówności przez  $2ab(a+b)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - 4ab &\geq 0, \\ a^2 + 2ab + b^2 - 4ab &\geq 0, \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ (a-b)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

## **Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci  $(a+b)^2 \geq 4ab$  lub  $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ , lub

$\frac{(a+b)^2 - 4ab}{2ab(a+b)} \geq 0$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

## **Uwagi**

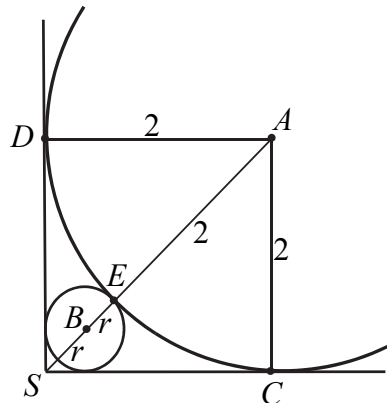
1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości  $a$  i  $b$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zakończy rozumowanie, zapisując nierówność  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  i nie powoła się na stosowne twierdzenie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności  $(a-b)^2 \geq 0$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 29. (0–4)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|AS| = 2\sqrt{2}$  oraz  $|AE| = 2$ . Zatem

$$|SE| = 2\sqrt{2} - 2.$$

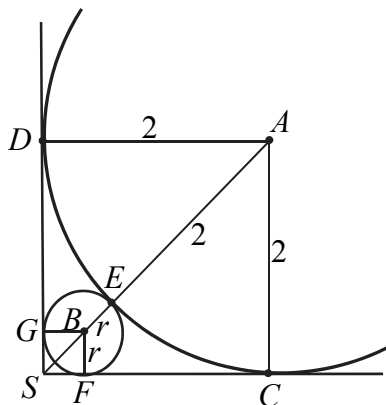
Średnica okręgu o środku  $B$  i promieniu  $r$  jest krótsza od odcinka  $SE$ , więc

$$2r < 2\sqrt{2} - 2, \text{ czyli } r < \sqrt{2} - 1.$$

Co kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|AS| = 2\sqrt{2}$ ,  $|BS| = r\sqrt{2}$  oraz  $|AE| = 2$ .

Ponieważ  $|AS| = |BS| + |BE| + |AE|$ , więc otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} &= r\sqrt{2} + r + 2, \\ r(\sqrt{2} + 1) &= 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Stąd mnożąc obie strony tego równania przez  $\sqrt{2}-1$  otrzymujemy

$$r(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1),$$

$$r=2(\sqrt{2}-1)^2,$$

$$r=2(2-2\sqrt{2}+1),$$

$$r=2(3-2\sqrt{2}).$$

Sprawdźmy, czy  $2(3-2\sqrt{2}) < \sqrt{2}-1$ .

Przekształcamy tę nierówność równoważnie.

$$6-4\sqrt{2} < \sqrt{2}-1$$

$$7 < 5\sqrt{2}$$

Ponieważ  $\sqrt{2} \approx 1,41 > 1,4$ , więc  $5\sqrt{2} > 7$ . Oznacza to, że  $r < \sqrt{2}-1$ .

### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy:

- obliczy  $|SE| = 2\sqrt{2} - 2$

albo

- zapisze równość  $2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2$ .

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy  $r$  i zapisze wynik w postaci ułamka, w którym w mianowniku występuje liczba niewymierna, np.  $r = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1}$ , i błędnie szacuje tę liczbę,

np. stosując takie same przybliżenia z niedomiarem  $\sqrt{2}$  w liczniku i w mianowniku, to otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że długość odcinka, którego jednym końcem jest punkt styczności okręgów, a drugim wierzchołek kąta prostego, jest równa długości średnicy mniejszego okręgu i nie wycofa się z tego założenia oraz nie obliczy długości wspomnianego odcinka, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 30. (0–2)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym (4.n). Zdający potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$ , $y = f(x) + a$ , $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ (4.d).
--	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Ponieważ punkt  $P$  leży na wykresie funkcji  $f$ , więc możemy zapisać:

$$9 = a^2, \text{ gdzie } a > 0.$$

Stąd  $a = 3$ .

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej  $f$  jest przedział  $(0, +\infty)$ . Wykres funkcji  $g$  powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$  o 2 jednostki w dół. Zatem zbiorem wartości funkcji  $g$  jest przedział  $(-2, +\infty)$ .

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy:

- obliczy  $a$ :  $a = 3$

albo

- zapisze zbiór wartości funkcji  $g$ :  $(-2, +\infty)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**  
gdy obliczy  $a$ :  $a = 3$  i zapisze zbiór wartości funkcji  $g$ :  $(-2, +\infty)$ .

**Uwaga**

Opis zbioru wartości uznaje się za poprawny, jeśli zbiór ten jest przedstawiony graficznie w sposób jednoznacznie wskazujący, że liczba  $-2$  nie należy do tego zbioru, lub zbiór ten jest opisany słownie, lub jakkolwiek poprawną nierównością.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór wartości funkcji w postaci  $(+\infty, -2)$ , to przyznajemy **2 punkty**, o ile obliczy  $a = 3$ .

### Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).
--------------------------------	--

#### Przykładowe rozwiązania

##### I sposób

Korzystamy ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $a_{12}$ :

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $S_{12}$ :

$$S_{12} = \frac{2a_1 + (12-1) \cdot r}{2} \cdot 12 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = 12a_1 + 66r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

##### II sposób

Korzystamy ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na  $S_{12}$ :

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 .$$

Otrzymujemy równanie

$$162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12 .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

#### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.  
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi  $a_1$  i  $r$  wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\text{np.: } 30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = \frac{2a_1 + 11 \cdot r}{2} \cdot 12$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą  $a_1$  wynikające z zastosowania poprawnego wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego bez wykorzystywania różnicy ciągu:

$$\text{np.: } 162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12$$

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą  $a_1$  i obliczy pierwszy wyraz ciągu:  $a_1 = -3$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 12 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że  $a_1 = -3$ , to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że  $a_1 = -3$ , ale nie zapisze wszystkich 12 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko  $a_1 = -3$  lub  $a_1 = -3$  i  $r = 3$ , to otrzymuje **0 punktów**.

### Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$ , mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik $a$ w równaniu kierunkowym (8.b). Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).
-----------------------------------	---

### Przykładowe rozwiązania

I sposób – proste prostopadłe

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$

$$a_{AB} = \frac{1}{3}.$$

Ponieważ kąt prosty w trójkącie  $ABC$  jest przy wierzchołku  $B$ , więc wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $B$

$$y = -3x + 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu  $C$ , który jest punktem wspólnym prostych określonych równaniami  $y = 2x + 3$  i  $y = -3x + 35$ :

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy parę  $x = \frac{32}{5}$  i  $y = \frac{79}{5}$ .

Zatem punkt  $C$  ma współrzędne  $(\frac{32}{5}, \frac{79}{5})$

### II sposób – twierdzenie Pitagorasa

Ponieważ wierzchołek  $C$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  leży na prostej o równaniu  $y = 2x + 3$ , więc jego współrzędne zapisujemy następująco

$$C = (x, 2x + 3).$$

Punkt  $B$  jest wierzchołkiem kąta prostego, zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$  otrzymujemy równanie

$$(x - 4)^2 + (2x + 3 - 3)^2 = (10 - 4)^2 + (5 - 3)^2 + (x - 10)^2 + (2x + 3 - 5)^2,$$

czyli równanie

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 = 36 + 4 + x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 8x + 4.$$

Zatem

$$20x = 128 \text{ i dalej } x = \frac{32}{5}.$$

Jeśli  $x = \frac{32}{5}$ , to  $y = \frac{79}{5}$ . Zatem  $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$ .

### III sposób – iloczyn skalarny

Wektory niezerowe są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0. W tym przypadku oznacza to, że iloczyn skalarny wektorów  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  jest równy 0.

Współrzędne wektora  $\overline{AB}$  są równe  $\overline{AB} = [6, 2]$ .

Punkt  $C$  ma współrzędne równe  $C = (x, 2x + 3)$ , więc współrzędne wektora  $\overline{BC}$  są równe

$$\overline{BC} = [x - 10, 2x + 3 - 5].$$

Z warunku  $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$  otrzymujemy równanie

$$6(x - 10) + 2(2x - 2) = 0,$$

$$3x - 30 + 2x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{32}{5}.$$

Zatem  $C = \left(\frac{32}{5}, 2 \cdot \frac{32}{5} + 3\right) = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$ .

### **Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający

- uzależni obie współrzędne punktu  $C$  od jednej zmiennej,  
np.:  $C = (x, 2x + 3)$  lub  $C = \left(\frac{y-3}{2}, y\right)$

albo

- zapisze równość  $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$  i obliczy długość  $AB$ :  $|AB| = 2\sqrt{10}$ ,

albo

- zapisze równość  $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$  i zapisze jedną z długości  $|AC|$  lub  $|BC|$  w zależności od współrzędnych punktu  $C$ ,

albo

- obliczy współrzędne wektora  $\overline{AB}$  :  $\overline{AB} = [6, 2]$  i zapisze, że  $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$ ,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora  $\overline{BC}$  w zależności od współrzędnych punktu  $C$ :  
 $\overline{BC} = [x-10, y-5]$  i zapisze, że  $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$ ,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora  $\overline{BC}$  w zależności od jednej współrzędnej punktu  $C$ , np.:  $\overline{BC} = [x-10, 2x+3-5]$ ,

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy równania prostej  $AB$ :

$$a_{AB} = \frac{1}{3}$$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $B$ :  $a_{BC} = -3$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(10-4)^2 + (5-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}\right)^2,$$

albo

- obliczy współrzędne wektora  $\overline{AB}$  :  $\overline{AB} = [6, 2]$ , wyznaczy współrzędne wektora  $\overline{BC}$  w zależności od jednej współrzędnej punktu  $C$ , np.:  $\overline{BC} = [x-10, 2x+3-5]$  i zapisze, że  $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$ ,

albo

- zapisze równość wynikającą z warunku  $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$ , w której niewiadomymi są dwie współrzędne punktu  $C$ , np.:  $6(x-10)+2(y-5)=0$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, która jest współrzędną punktu  $C$ , np.:

$$2x+3 = -3(x-10)+5$$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający

- obliczy  $x = \frac{32}{5}$  albo  $y = \frac{79}{5}$  i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy

albo

- obliczy obie współrzędne punktu  $C$  z błędami rachunkowymi.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy i zapisze współrzędne punktu  $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$ .

## Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **4 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, ale popełnia błąd, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i:
  - a) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu współczynnika  $a_{AB}$ , np.  $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$  zamiast  $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - b) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu równania prostej  $BC$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - c) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd, polegający na tym, że zdający zapisze błędną równość:  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - d) w I sposobie rozwiązania przyjmie, że kąt prosty jest przy wierzchołku  $A$ , to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - e) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy podstawieniu do wzoru na odległość punktów, nawet trzykrotnie powtórzony, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - f) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest zamiana miejscami współrzędnych punktu  $C$  w początkowym etapie rozwiązania, np.:  $C = (2x + 3, x)$ , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
  - g) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest przyjęcie bez obliczeń błędnego współczynnika  $b$  w równaniu prostej  $BC$  (np.  $\frac{5}{3}$ ), to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający realizuje pełną strategię rozwiązania, ale popełnia błąd merytoryczny, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i tym jedynym błędem merytorycznym jest błąd, polegający na zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ”, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na tym, że zapisuje błędną równość:  $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ , to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu  $y = 2x + 3$ , to za rozwiązanie zadania otrzymuje **0 punktów**, o ile w rozwiązaniu nie występują inne zapisy wymienione w schemacie oceniania, za które należy przyznać zdającemu punkty, np.:  $C = (x, 2x + 3)$ .
6. Jeżeli oprócz poprawnego rozwiązania (kąt prosty przy wierzchołku  $B$ ) zdający podaje inne rozwiązanie (np. kąt prosty przy wierzchołku  $A$ ), którego nie odrzuca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
7. Jeżeli zdający zapisze równanie prostej  $AB$  w postaci ogólnej (np. dokona właściwego podstawienia współrzędnych punktów do równania prostej przechodzącej przez 2 punkty) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 33. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para  $(x, y)$ , gdzie  $x \in A$  i  $y \in B$ . Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\Omega = \{(100,10), (100,11), (100,12), (100,13), (100,14), (100,15), (100,16), \\ (200,10), (200,11), (200,12), (200,13), (200,14), (200,15), (200,16), \\ (300,10), (300,11), (300,12), (300,13), (300,14), (300,15), (300,16), \\ (400,10), (400,11), (400,12), (400,13), (400,14), (400,15), (400,16), \\ (500,10), (500,11), (500,12), (500,13), (500,14), (500,15), (500,16), \\ (600,10), (600,11), (600,12), (600,13), (600,14), (600,15), (600,16), \\ (700,10), (700,11), (700,12), (700,13), (700,14), (700,15), (700,16)\}.$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Z cechy podzielności liczby całkowitej przez 3 wynika, że suma cyfr otrzymanej liczby  $x + y$  musi być podzielna przez 3. Zbiór  $A$  ma postać:

$$A = \{(100,11), (100,14), (200,10), (200,13), (200,16), \\ (300,12), (300,15), (400,11), (400,14), (500,10), \\ (500,13), (500,16), (600,12), (600,15), (700,11), (700,14)\}.$$

Zdarzeniu  $A$  sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli  $|A| = 16$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe  $\frac{16}{49}$ .

### Uwaga

Zdający może zapisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jako zbiór sum możliwych do utworzenia w wyniku losowania, tzn. może zastosować zapis:

$$\Omega = \{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, \\ 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, \\ 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, \\ 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, \\ 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, \\ 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, \\ 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716\}.$$

Wtedy zbiór

$$A = \{111, 114, 210, 213, 216, 312, 315, 411, 414, 510, 513, 516, 612, 615, 711, 714\}.$$

### II sposób

Rysujemy tabelę, która przedstawia model rozważanego doświadczenia.

	100	200	300	400	500	600	700
10		×			×		
11	×			×			×
12			×			×	
13		×			×		
14	×			×			×
15			×			×	
16		×			×		

Zdarzeniom elementarnym odpowiadają komórki tej tabeli. Jest ich 49, zatem  $|\Omega| = 49$ .

Symbolem **×** zaznaczamy te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu  $A$ , polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

Zdarzeniu  $A$  sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli  $|A| = 16$ .

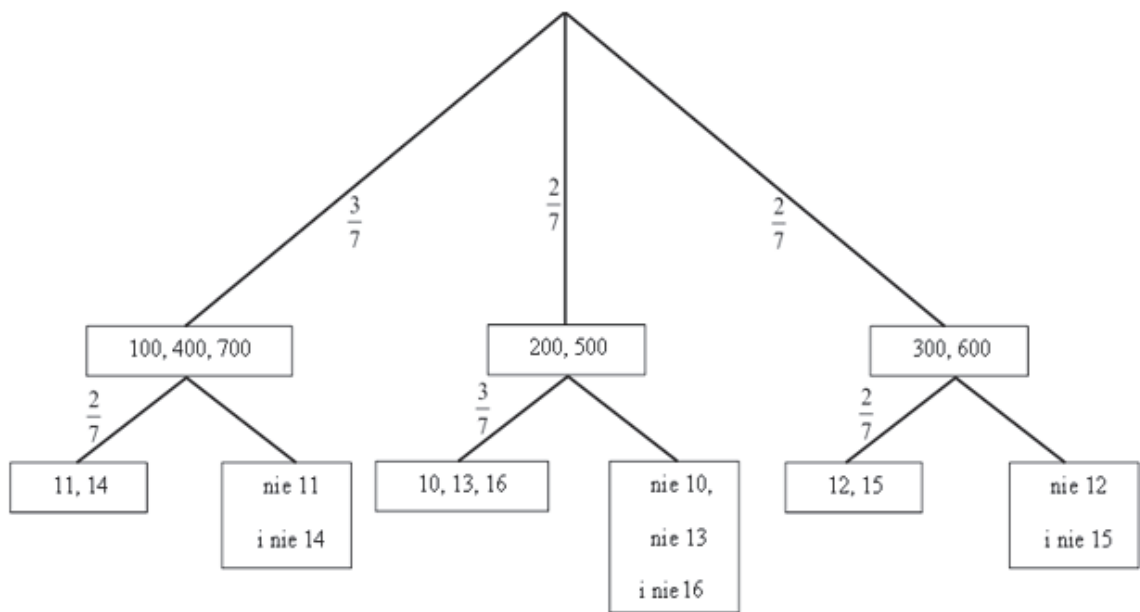
Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe  $\frac{16}{49}$ .

### III sposób

Rysujemy drzewko rozważanego doświadczenia.



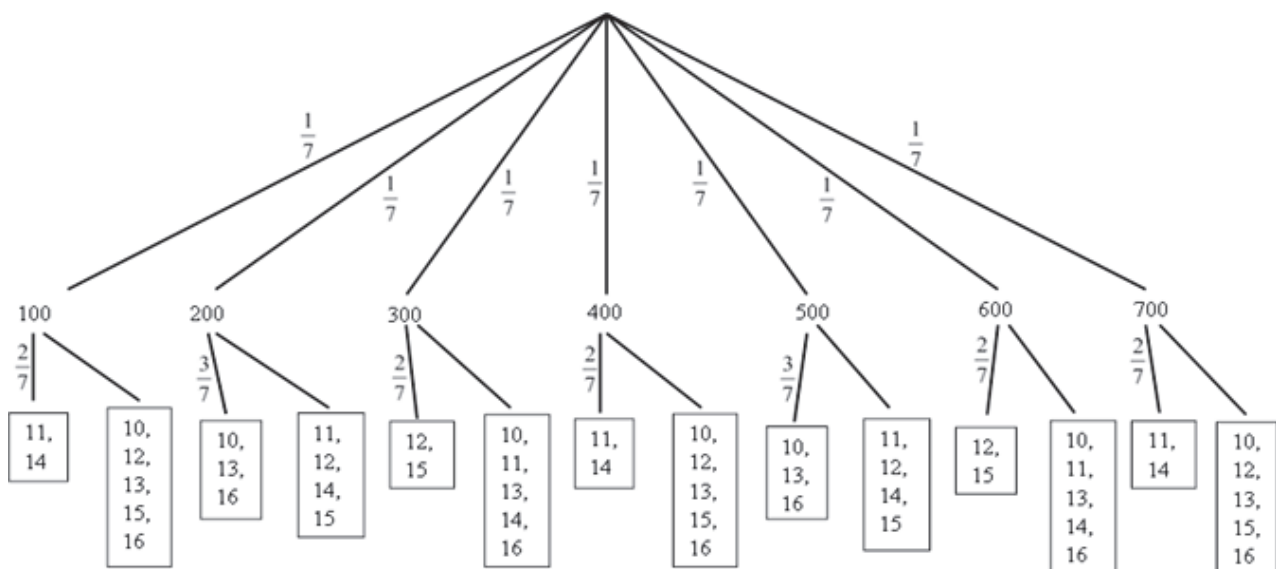
Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzieloną przez 3, jest równe  $\frac{16}{49}$ .

### Uwaga

Zdający może narysować drzewo probabilistyczne, w którym na każdym z etapów lub na jednym z etapów rozważa każdą możliwą do wylosowania liczbę oddzielnie. Przykład takiego drzewa znajduje się poniżej.



Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  może być obliczone w następujący sposób:

$$P(A) = 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{49}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .....** 1 p.  
Zdający

- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$
- albo
- zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,
- albo
- poda sposób obliczania  $|A|$ , np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 oraz wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  i nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego,
- albo
- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami,
- albo
- narysuje drzewko doświadczenia:
    1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi
    - albo
    2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....** 2 p.  
Zdający

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$
- albo
- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$  i zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,
- albo
- zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$  i poda sposób obliczania  $|A|$ , np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3, wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego,
- albo
- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami oraz zapisze, że  $|\Omega| = 7 \cdot 7$ ,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
    1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów
- albo
2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzieloną przez 3 i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów;

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wskaże wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu  $A$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze, że  $|\Omega|=7 \cdot 7$  oraz zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego

albo

- zapisze, że  $|\Omega|=7 \cdot 7$  oraz zapisze, że  $|A|=16$  i przedstawi sposób obliczenia tej liczby, np. zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3 i wskaże w dowolny sposób przykładowe zdarzenie elementarne lub przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 i wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , ale nie zaliczy do zbioru  $A$  niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi (np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami), zapisze  $|\Omega|=7 \cdot 7$ , oraz zaznaczy 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i żadnych innych zdarzeń elementarnych nie zaliczy do  $A$ ,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wystąpią wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu  $A$  wraz z prawdopodobieństwami oraz poprawnie zastosuje regułę drzewka do obliczenia prawdopodobieństwa  $P(A)$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

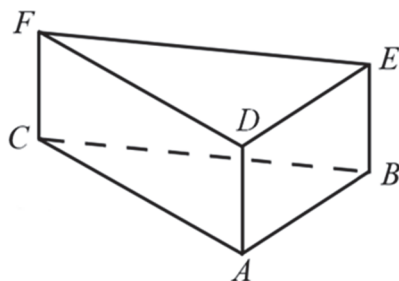
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 17 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , w tym 16 poprawnych i jedno niepoprawne oraz otrzyma prawdopodobieństwo równe  $\frac{17}{49}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 15 poprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i otrzyma prawdopodobieństwo równe  $\frac{15}{49}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przyjmie błędną liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i nie jest to efekt błędu rachunkowego, np. przyjmie  $|\Omega|=7 \cdot 6$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze jedynie  $|\Omega|=7 \cdot 7$ ,  $|A|=16$  i nie przedstawi czytelnego uzasadnienia liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , i obliczy  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$ , to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze  $|\Omega|=7 \cdot 7$ ,  $|A|=16$  oraz zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3, ale w przedstawionym rozwiązaniu nie można zidentyfikować żadnego zdarzenia elementarnego, które zdający powinien rozważyć, to otrzymuje **2 punkty**, nawet jeśli w rozwiązaniu występuje poprawny wynik końcowy.
7. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , w tym 15 poprawnych i jedno niewłaściwe i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

#### Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach (9.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe (3.a).
-----------------------------------	--

#### Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Rozważany graniastosłup ma 5 ścian, a każda z nich ma takie samo pole. Obliczamy pole podstawy, a zarazem pole jednej ściany bocznej:

$$45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}.$$

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc jego pole jest równe

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},$$

$$a = 6.$$

Ściana boczna jest prostokątem o bokach długości  $a$  i  $h$ , więc pole każdej ściany bocznej jest równe

$$P_{ABED} = ah.$$

Z warunków zadania wynika, że:

$$ah = 9\sqrt{3}.$$

Znamy długość krawędzi podstawy  $a$ , zatem:

$$6h = 9\sqrt{3}.$$

Obliczamy wysokość graniastosłupa

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Objętość graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABC} \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{2}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- zapisze zależność między wielkościami  $a$  i  $h$  wynikającą z równości pól podstawy i ściany bocznej graniastosłupa:  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = ah$

albo

- obliczy pole jednej ściany graniastosłupa:  $45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}$ ,

albo

- zapisze równanie:  $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = 45\sqrt{3}$

albo

- zapisze równania:  $2 \cdot \frac{1}{2}ah_p + 3ah = 45\sqrt{3}$  i  $\frac{1}{2}ah_p = ah$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające na wyznaczenie długości krawędzi podstawy lub wysokości graniastosłupa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- uzależni objętość bryły od jednej zmiennej

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa:  $a = 6$ ,  $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa:  $a = 6$  i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej  $a$  lub obliczy wysokość graniastosłupa  $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$  i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej  $h$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy objętość graniastosłupa:  $V = \frac{81}{2}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na niepoprawnym stosowaniu wzoru na pole trójkąta równobocznego albo wzoru na pole prostokąta, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem ściany bocznej i w efekcie rozważa jeden z trzech przypadków:  $2P_p = P_{sb}$ ,  $P_p = 3P_{sb}$ ,  $2P_p = 3P_{sb}$ , albo błąd, polegający na przyjęciu, że graniastosłup ma trzy ściany boczne i jedną podstawę, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwagach 2. lub 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający popełnia inne niż wymienione w uwagach 2. lub 3. błędy, dotyczące pól ścian bryły, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający rozważa graniastosłup trójkątny, który nie jest prawidłowy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.