CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny** **Test diagnostyczny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-**100**-2103, EMAP-P0-**200**-2103, EMAP-P0-**300**-2103, EMAP-P0-**400**-2103, EMAP-P0-**700**-2103, EMAP-P0-**Q00**-2103
Termin egzaminu:	4 marca 2021 r.
Data publikacji dokumentu:	5 marca 2021 r.

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach […] z użyciem symboli pierwiastków, potęg); 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G7.5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 3.6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.4) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji […] tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzącej przez dany punkt.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość […] ostrosłupa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G9.3) wyznacza […] medianę zestawu danych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

ZADANIA OTWARTE

Uwaga: *Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania*.

Zadanie 29. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2 + 2x - 24$.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej $2x^2 + 2x - 24 > 0$.

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
    - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
    - odczyta z wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$ i zapisze miejsca zerowe i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

ALBO

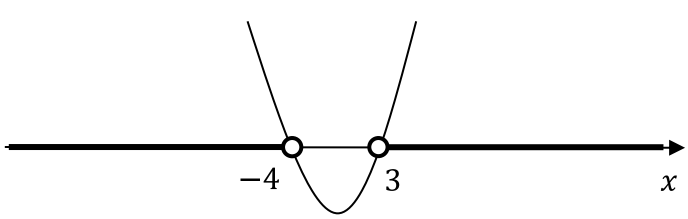
- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

ALBO

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi:
1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-4, -\infty) \cup (3, +\infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy etap rozwiązania
Zapisujemy nierówność w postaci $2x^2 + 2x - 24 > 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $2x^2 + 2x - 24$.
Obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta = 196$ i stąd $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

Stosujemy wzory Viète'a:
$x_1 \cdot x_2 = -12$ oraz $x_1 + x_2 = -1$, stąd $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

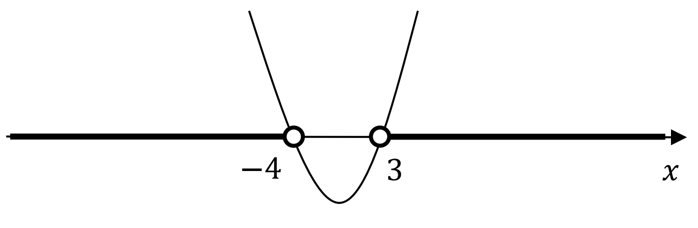
ALBO

Podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu: $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

Sporządzamy wykres funkcji $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$, zaznaczamy miejsca zerowe na wykresie i podpisujemy $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

Drugi etap rozwiązania
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$ lub



Zadanie 30. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy pierwiastki równania: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Uwaga:
Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe i poprawnie je rozwiąże, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie ma sens liczbowy dla $x \neq \frac{2}{3}$.
Przekształcamy równanie:

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x+2$$

$$6x-1 = (3x-2)(3x+2)$$

$$6x-1 = 9x^2-4$$

$$-9x^2+6x+3 = 0 \quad /:(-3)$$

$$3x^2-2x-1 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.
Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3x^2-2x-1$: $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1) = 16$
i stąd $x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = 1$.

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby $\frac{2}{3}$, więc są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 31. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu.

Zasady oceniania

dla sposobów 1. oraz 2.

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze, że $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AOC} + P_{\Delta ABO}$

ALBO

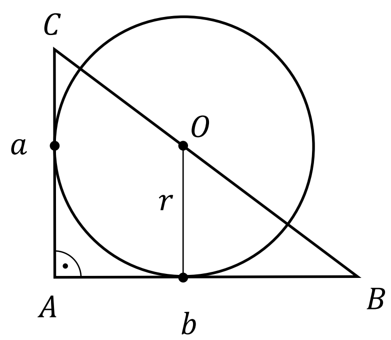
- zapisze związek pomiędzy a, b i r, który wynika z proporcjonalności odpowiednich boków trójkątów podobnych DOC i ABC (lub DOC i EBO, lub EBO i ABC), np.:

$$\frac{a-r}{r} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a-r}{r} = \frac{r}{b-r}, \qquad \frac{r}{b-r} = \frac{a}{b}$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wykaże, że $r = \frac{a \cdot b}{a+b}$.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.



Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.
Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów ABO i AOC.
Promień okręgu poprowadzony z punktu O do punktu styczności okręgu z odcinkiem AB jest prostopadły do tego odcinka, więc $P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$. Podobnie $P_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$. Zatem

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r = \frac{1}{2}(a+b) \cdot r$$

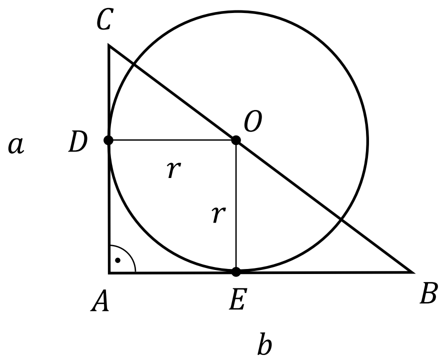
Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}(a+b) \cdot r$$

$$r = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

To należało wykazać.

Sposób 2.
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
A, B, C – wierzchołki trójkąta,
D – punkt styczności przyprostokątnej AC z okręgiem,
E – punkt styczności przyprostokątnej AB z okręgiem. (Zobacz rysunek).



Ponieważ odcinek OD jest prostopadły do odcinka AC oraz $|\sphericalangle DCO| = |\sphericalangle ACB|$, więc trójkąty DCO i ABC są podobne (na podstawie cechy *kkk* podobieństwa trójkątów). Stąd

$$\frac{|DC|}{|DO|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Odcinek OE jest prostopadły do AB, więc $|DC| = |AC| - |OE| = a - r$. Zatem

$$\frac{a-r}{r} = \frac{a}{b}$$

$$(a-r) \cdot b = a \cdot r$$

$$ab - rb = ar$$

$$ab = rb + ra$$

$$ab = (a+b)r$$

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

To należało wykazać.

Zadanie 32. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy podniesie obie strony równości $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ do kwadratu i otrzyma
$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy obliczy wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Podnosimy obie strony równości $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ do kwadratu i otrzymujemy:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$$

Korzystamy z zależności $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i otrzymujemy $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25}$, stąd po przekształceniu mamy: $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25}$.

Zadanie 33. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze równość prowadzącą do obliczenia wysokości trójkąta równoramiennego BCD opuszczonej na podstawę tego trójkąta, np.: $h^2 = 13^2 - 5^2$

ALBO

- obliczy ze wzoru Herona pole trójkąta BCD

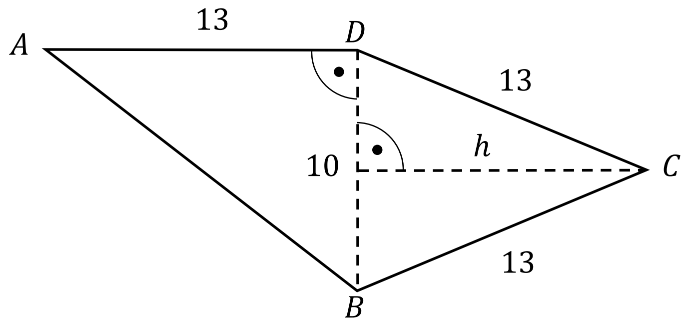
ALBO

- obliczy pole trójkąta ABD.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy zapisze, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe 125.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekątna BD dzieli czworokąt $ABCD$ na trójkąt prostokątny ABD oraz trójkąt równoramienny BCD (zobacz rysunek).



Pole trójkąta prostokątnego ABD jest równe 65. Obliczamy wysokość h trójkąta równoramiennego BCD poprowadzoną z wierzchołka C. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$.
Pole trójkąta BCD jest równe $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$. Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól obu trójkątów: $P_{ABCD} = 60 + 65 = 125$.

Uwaga:
Pole trójkąta BCD można obliczyć ze wzoru Herona:

$$P_{BCD} = \sqrt{18 \cdot (18-10) \cdot (18-13) \cdot (18-13)} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Zadanie 34. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 4.10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze, że $f(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wykaże, że $1 + c > b$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych, więc $f(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. W szczególności $f(-1) = 1 - b + c > 0$, czyli $1 + c > b$.
To należało wykazać.

Zadanie 35. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 5.4) stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

<u>dla sposobów 1 oraz 2.</u>

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- wykorzystа wzór na sumę S_5 i zapisze równanie z niewiadomymi a_1 oraz r: $\frac{(a_1+a_1+4r)\cdot 5}{2} = 10$

ALBO

- wykorzysta wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisze

$$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r = 10$$

ALBO

- uzależni a_3, a_5, a_{13} od a_1 oraz r i zapisze równość wynikającą z własności ciągu geometrycznego: $(a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- obliczy trzeci wyraz ciągu arytmetycznego a_3: $a_3 = a_1 + 2r = 2$

ALBO

- zapisze układu równań z niewiadomymi a_1 oraz r, np.:

$$\begin{cases} \frac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą (r lub a_1), np.:

$(2 + 2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r)$ lub $(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$ lub $r^2 - 3r = 0$.

Zdający otrzymuje ....4 p.
gdy:

- rozwiąże równanie $r^2 - 3r = 0$: $r = 0$ oraz $r = 3$

ALBO

- rozwiąże równanie $(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$: $a_1 = -4$ lub $a_1 = 2$

ALBO

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Zdający otrzymuje .... 5 p.
gdy wyznaczy wzór na n-ty wyraz podanego ciągu a_n: $a_n = -4 + (n-1) \cdot 3$,
$a_n = 3n - 7$.

Uwaga:
Jeśli zdający nie odrzuci rozwiązania $r = 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Z warunków zadania wiemy, że $S_5 = 10$, czyli $\frac{(a_1 + a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10$.
Po przekształceniu ostatniej zależności otrzymujemy: $a_1 + 2r = 2 = a_3$.
Z warunków zadania wiemy, że wyrazy $a_3 = 2$, $a_5 = a_3 + 2r$, $a_{13} = a_3 + 10r$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Stąd mamy $(2 + 2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r)$.
Otrzymujemy równanie kwadratowe $r^2 - 3r = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $r = 0$ oraz $r = 3$. Odrzucamy odpowiedź $r = 0$, ponieważ ciąg arytmetyczny jest rosnący.
Dla $r = 3$ obliczamy a_1: $a_1 = a_3 - 2r = 2 - 6 = -4$.
Wyznaczamy wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = -4 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 7.$$

Sposób 2.

Z warunków zadania wiemy, że $S_5 = 10$, czyli $\frac{(a_1 + a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10$.
Z własności ciągu geometrycznego $(a_5)^2 = a_3 \cdot a_{13}$, co zapisujemy w postaci:

$$(a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r).$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

z którego obliczamy wartość pierwszego wyrazu ciągu i różnicę ciągu, np.:

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{2}a_1 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{2}a_1 \\ (4 - a_1)^2 = 2 \cdot (12 - 5a_1) \end{cases}$$

$$16 - 8a_1 + (a_1)^2 = 24 - 10a_1$$

$$(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$a_1 = -4 \text{ lub } a_1 = 2$$

Dla $a_1 = -4$ otrzymujemy $r = 3$, natomiast dla $a_1 = 2$ otrzymujemy $r = 0$.
Ciąg arytmetyczny jest rosnący, więc $r = 0$ odrzucamy.
Wyznaczamy wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = -4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 7$.