CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100-2206, EMAP-P0-200-2206, EMAP-P0-300-2206, EMAP-P0-400-2206, EMAP-P0-600-2206, EMAP-P0-700-2206, EMAP-P0-Q00-2206
Termin egzaminu:	2 czerwca 2022 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2022 r.

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(-x)$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiazywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G8.3) odczytuje z wykresu funkcji: […] argumenty dla danej wartości funkcji […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G7.3) rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.8) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] trapezach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.1) rozpoznaje graniastosłupy […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni […] ostrosłupa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G9.3) wyznacza […] medianę zestawu danych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

ZADANIA OTWARTE

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 29. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $-3x^2-10x+8$.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej $-3x^2-10x+8\geq 0$.

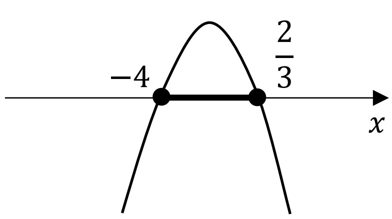
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy poprawnie zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, tj. obliczy/poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $-3x^2-10x+8$: $x_1=-4$ oraz $x_2=\frac{2}{3}$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy spełni warunki określone w zasadach oceniania za 1 pkt oraz poprawnie zrealizuje drugi etap rozwiązania, tj.:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle -4,\frac{2}{3}\right\rangle$ lub $x\in\left\langle -4,\frac{2}{3}\right\rangle$

ALBO

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi:
1. Jeżeli zdający, realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, rozpoczynając realizację pierwszego etapu rozwiązania, rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $-3x^2+8$) i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $-3x^2+8\geq 0$), to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.
5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów oraz zapisze: $x\in\left(-4, \frac{2}{3}\right)$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left\langle\frac{2}{3}, -4\right\rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy etap rozwiązania
Zapisujemy nierówność w postaci $-3x^2-10x+8\geq 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $-3x^2-10x+8$.
Obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta=196$ i stąd $x_1=-4$ oraz $x_2=\frac{2}{3}$,

ALBO

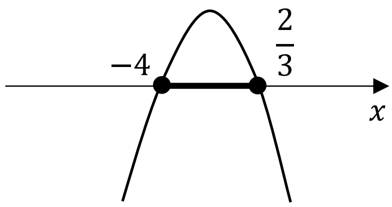
zauważamy, że liczba (-4) jest pierwiastkiem trójmianu $-3x^2-10x+8$ i stosujemy wzory Viète'a:
$x_1+x_2=-\frac{10}{3}$ oraz $x_1\cdot x_2=-\frac{8}{3}$, więc $x_1=-4$ oraz $x_2=\frac{2}{3}$,

ALBO

podajemy pierwiastki trójmianu $-3x^2-10x+8$ bezpośrednio, zapisując je lub zaznaczając je na wykresie: $x_1=-4$ oraz $x_2=\frac{2}{3}$.

Drugi etap rozwiązania

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle -4, \frac{2}{3} \right\rangle$ lub $x \in \left\langle -4, \frac{2}{3} \right\rangle$ lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej



Zadanie 30. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy przekształci nierówność $\left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 < \frac{x^2 + 4y^2}{5}$ do postaci $c \cdot [W(x, y)]^2 > 0$ lub $-c \cdot [W(x, y)]^2 < 0$ (gdzie W jest wielomianem, $c > 0$).

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie, tj. spełni warunek określony w zasadach oceniania za 1 pkt i, korzystając z założenia, przeprowadzi wnioskowanie o prawdziwości tezy.

Uwaga:
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości x i y, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie nierówność $\left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 < \frac{x^2 + 4y^2}{5}$:

$$\left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 < \frac{x^2 + 4y^2}{5}$$

$$\frac{1}{25}x^2 + \frac{8}{25}xy + \frac{16}{25}y^2 < \frac{x^2 + 4y^2}{5}$$

$$x^2 + 8xy + 16y^2 < 5x^2 + 20y^2$$

$$-4x^2 + 8xy - 4y^2 < 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 > 0$$

$$(x - y)^2 > 0$$

Z założenia wiadomo, że $x \neq y$, więc $(x - y)^2$ jest liczbą dodatnią jako kwadrat liczby rzeczywistej $x - y$ różnej od zera. Ponieważ nierówność $(x - y)^2 > 0$ jest prawdziwa, więc nierówność $\left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 < \frac{x^2 + 4y^2}{5}$ również jest prawdziwa. To należało pokazać.

Zadanie 31. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze wzór funkcji f w postaci iloczynowej/kanonicznej z uwzględnieniem informacji, że liczba 2 jest jedynym miejscem zerowym funkcji: $f(x) = a(x-2)^2$

ALBO

- skorzysta z własności funkcji kwadratowej i zapisze wartość wyrazu wolnego funkcji f, np. $c = 8$, $f(x) = ax^2 + bx + 8$,

ALBO

- zapisze równanie $b^2 - 4ac = 0$ lub $-\frac{b}{2a} = 2$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i zapisze wzór funkcji f z poprawnymi wartościami współczynników, np.: $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$, $f(x) = 2(x-2)^2$.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej/kanonicznej: $f(x) = a(x-2)^2$,
gdzie $a \neq 0$. Ponieważ $f(0) = 8$, więc $8 = a(0-2)^2$, skąd $a = 2$.
Zatem $f(x) = 2(x-2)^2$.

Sposób 2.
Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej: $f(x) = ax^2 + bx + c$,
gdzie $a \neq 0$ oraz $b, c \in \mathbb{R}$. Ponieważ $f(0) = 8$, więc $c = 8$. Funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe równe 2, więc
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ i $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$.
Zatem $b^2 - 4a \cdot 8 = 0$ i $b = -4a$. Stąd otrzymujemy $(-4a)^2 - 4a \cdot 8 = 0$.
Rozwiązujemy równanie $(-4a)^2 - 4a \cdot 8 = 0$:

$$(-4a)^2 - 4a \cdot 8 = 0$$

$$16a^2 - 32a = 0$$

$$16a(a-2) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad a = 2$$

Funkcja f jest kwadratowa, więc $a = 2$ i wówczas $b = -4a = -8$.
Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej: $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$.

Zadanie 32. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze równanie z niewiadomą x, wynikające z zastosowania definicji/własności ciągu geometrycznego, np. $(3x+2)^2 = x \cdot (9x+16)$

ALBO

- zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi (z których jedną jest x), wynikające z treści zadania, np. $3x+2 = x \cdot q$ oraz $9x+16 = x \cdot q^2$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy spełni kryterium z zasad oceniania za 1 pkt i obliczy wszystkie wartości x, dla których ciąg $(x, 3x+2, 9x+16)$ jest geometryczny: $x = 1$.

Uwaga:
Jeżeli zdający zapisze tylko $x = 1$, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>
Ponieważ ciąg $(0, 2, 16)$ nie jest geometryczny, więc $x \neq 0$. Ciąg $\left(-\frac{2}{3}, 0, 10\right)$ nie jest geometryczny, więc $x \neq -\frac{2}{3}$. Korzystamy z definicji/własności ciągu geometrycznego i zapisujemy równanie

$$\frac{3x+2}{x} = \frac{9x+16}{3x+2}$$

Stąd dalej otrzymujemy

$$(9x+16)x = (3x+2)^2$$

$$9x^2 + 16x = 9x^2 + 12x + 4$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Sposób 2.
Korzystamy z własności ciągu geometrycznego i zapisujemy równanie

$$x \cdot (9x + 16) = (3x + 2)^2$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$9x^2 + 16x = 9x^2 + 12x + 4$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Ciąg $(1, 5, 25)$ jest geometryczny, więc $x = 1$.

Sposób 3.
Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego. Stosujemy wzór na n–ty wyraz ciągu i otrzymujemy równania

$$3x + 2 = x \cdot q \quad \text{oraz} \quad 9x + 16 = x \cdot q^2$$

Liczba $x = 0$ nie spełnia żadnego z tych dwóch równań, więc $x \neq 0$. Zatem

$$q = \frac{3x+2}{x} \quad \text{oraz} \quad 9x + 16 = x \cdot q^2$$

Stąd dalej otrzymujemy

$$9x + 16 = x \cdot \left(\frac{3x + 2}{x}\right)^2$$

$$(9x + 16)x = (3x + 2)^2$$

$$9x^2 + 16x = 9x^2 + 12x + 4$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Ciąg $(1, 5, 25)$ jest geometryczny, więc $x = 1$.

Zadanie 33. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- obliczy długość przekątnej AC: $|AC| = 10$

ALBO

- zapisze, że trójkąty DCA i CAB są podobne,

ALBO

- zapisze związek między długościami odpowiednich boków trójkątów DCA i CBA wynikający z podobieństwa tych trójkątów, np. $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|BA|}$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zastosuje poprawną metodę wyznaczenia długości ramienia AD i otrzyma poprawny wynik: $|AD| = 10 \cdot \frac{24}{26}$.

Przykładowe pełne rozwiązania

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość przekątnej AC trapezu:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$|AC|^2 + 24^2 = 26^2$$

$$|AC| = \sqrt{100} = 10$$

Ponieważ AB oraz CD są równoległe, więc kąty naprzemianległe CAB oraz DCA mają równe miary. Z równości $|\measuredangle CAB| = |\measuredangle DCA|$ oraz $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle CDA| = 90°$ otrzymujemy $|\measuredangle CBA| = |\measuredangle DAC|$. Zatem trójkąty DCA i CAB są podobne na podstawie cechy *kkk* podobieństwa trójkątów. Stąd

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|BA|}$$

$$\frac{|AD|}{10} = \frac{24}{26}$$

$$|AD| = \frac{120}{13}$$

Zadanie 34. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub poda ich liczbę: $|\Omega| = 46$

ALBO
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i nie wypisze żadnego niewłaściwego: $56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$,

ALBO
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 7$,

ALBO
- sporządzi fragment drzewa doświadczenia składający się jedynie z 7 istotnych gałęzi,

ALBO
- zapisze tylko $P(A) = \frac{7}{46}$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy spełni warunki określone w zasadach oceniania za 1 punkt oraz zastosuje poprawną metodę obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyska poprawny wynik:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{46}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 46 lub 7 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający rozpatruje inne niż podane w treści zadania doświadczenie losowe, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe większe od 53.

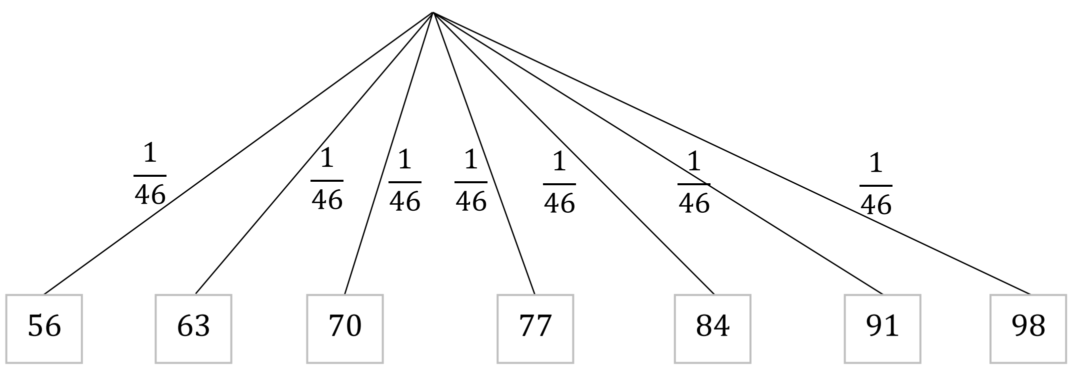
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 99 - 53 = 46$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne: $56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$, więc $|A| = 7$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{46}$.

<u>Sposób 2.</u> (*drzewo stochastyczne*)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe większe od 53.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 99 - 53 = 46$.
Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia, które zawiera 7 istotnych gałęzi, które odpowiadają zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{46} + \frac{1}{46} + \frac{1}{46} + \frac{1}{46} + \frac{1}{46} + \frac{1}{46} + \frac{1}{46} = \frac{7}{46}$$

Zadanie 35. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy spełni jeden z poniższych warunków:

1) obliczy lub poda współrzędne wierzchołka B: $B = (9, 1)$
2) obliczy współczynnik kierunkowy prostej AB (AS): $a_{AB} = a_{AS} = \frac{1}{2}$
3) zapisze współrzędne wierzchołka C w zależności od jednej zmiennej, np. $C = (x, x + 10)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy spełni dwa z warunków 1)–3) określonych w zasadach oceniania za 1 pkt.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy:

- obliczy współrzędne wierzchołka B i wyznaczy równanie prostej CS: $B = (9,1)$, $y = -2(x - 5) - 1$

ALBO

- obliczy współrzędne wierzchołka B i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi (współrzędnymi wierzchołka C): $B = (9,1)$ oraz

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + \left(y - (-3)\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-9)^2 + (y-1)^2}\right)^2,$$

ALBO

- zapisze $C = (x, x + 10)$ oraz

$$\left(\sqrt{(1-5)^2 + \left(-3 - (-1)\right)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-5)^2 + \left(y - (-1)\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y - (-3)^2}\right)^2$$

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy:

- obliczy współrzędne wierzchołka B i zapisze równanie z jedną niewiadomą (współrzędną wierzchołka C): $B=(9,1)$ oraz $-2x+9=x+10$ lub
$$\left(\sqrt{(x-1)^2+\left(x+10-(-3)\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-9)^2+(x+10-1)^2}\right)^2,$$ lub
$$\left(\sqrt{(1-5)^2+\left(-3-(-1)\right)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+\left(x+10-(-1)\right)^2}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{(x-1)^2+(x+10-(-3)^2}\right)^2$$

ALBO

- obliczy współrzędne wierzchołka C i nie obliczy poprawnie współrzędnych wierzchołka B: $C=\left(-\frac{1}{3},\frac{29}{3}\right)$.

Zdający otrzymuje .... 5 p.
gdy zastosuje poprawną metodę wyznaczenia współrzędnych punktów B i C oraz zapisze poprawny wynik: $B=(9,1)$, $C=\left(-\frac{1}{3},\frac{29}{3}\right)$.

Uwaga:
Jeśli zdający błędnie obliczy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do AB i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u> (symetralna odcinka)
Korzystamy ze wzorów na współrzędne środka odcinka i obliczamy współrzędne punktu $B=(x_B,y_B)$:

$$\frac{x_A+x_B}{2}=x_S \quad \text{i} \quad \frac{y_A+y_B}{2}=y_S$$
$$\frac{1+x_B}{2}=5 \quad \text{i} \quad \frac{-3+y_B}{2}=-1$$
$$x_B=9 \quad \text{i} \quad y_B=1$$

Zatem $B=(9,1)$.

Ponieważ $|AC|=|BC|$, więc wierzchołek C leży na prostej prostopadłej do AB (do AS) i jednocześnie przechodzącej przez punkt S.
Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB (AS):

$$a_{AB}=a_{AS}=\frac{-1-(-3)}{5-1}=\frac{1}{2}$$

Stąd współczynnik kierunkowy prostej CS jest równy $a_{CS} = -\frac{1}{a_{AB}} = -2$. Zapisujemy równanie prostej CS: $y = -2(x-5) - 1$, czyli $y = -2x + 9$.
Punkt C jest punktem przecięcia prostej CS z prostą o równaniu $y = x + 10$, więc współrzędne punktu $C = (x_C, y_C)$ spełniają równania

$$y_C = x_C + 10 \quad \text{oraz} \quad y_C = -2x_C + 9$$

Stąd otrzymujemy

$$x_C + 10 = -2x_C + 9 \quad \text{oraz} \quad y_C = x_C + 10$$

$$x_C = -\frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad y_C = -\frac{1}{3} + 10 = \frac{29}{3}$$

Zatem $C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{3}\right)$.

<u>Sposób 2.</u> (równość długości ramion)
Współrzędne punktu B wyznaczamy tak, jak w sposobie 1.
Wierzchołek $C = (x_C, y_C)$ leży na prostej o równaniu $y = x + 10$, więc $C = (x_C, x_C + 10)$.
Ponieważ $|AC| = |BC|$, więc

$$\left(\sqrt{(x_C - 1)^2 + \left(y_C - (-3)\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_C - 9)^2 + (y_C - 1)^2}\right)^2$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$\left(\sqrt{(x_C - 1)^2 + \left(x_C + 10 - (-3)\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_C - 9)^2 + (x_C + 10 - 1)^2}\right)^2$$

$$(x_C - 1)^2 + \left(x_C + 10 - (-3)\right)^2 = (x_C - 9)^2 + (x_C + 10 - 1)^2$$

$$(x_C - 1)^2 + (x_C + 13)^2 = (x_C - 9)^2 + (x_C + 9)^2$$

$$x_C^2 - 2x_C + 1 + x_C^2 + 26x_C + 169 = x_C^2 - 18x_C + 81 + x_C^2 + 18x_C + 81$$

$$24x_C = -8$$

$$x_C = -\frac{1}{3}$$

Zatem $x_C + 10 = -\frac{1}{3} + 10 = \frac{29}{3}$ i $C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{3}\right)$.

<u>Sposób 3.</u> (twierdzenie Pitagorasa)
Współrzędne wierzchołka B obliczamy tak, jak w sposobie 1.
Wierzchołek $C = (x_C, y_C)$ leży na prostej o równaniu $y = x + 10$, więc $C = (x_C, x_C + 10)$.
Ponieważ $|AC| = |BC|$, więc kąt ASC jest prosty. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ASC i otrzymujemy

$$|AS|^2 + |CS|^2 = |CA|^2$$

$$\sqrt{20}^2 + \left(\sqrt{(x_C-5)^2 + \left(y_C-(-1)\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_C-1)^2 + (y_C-(-3))^2}\right)^2$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$20 + (x_C-5)^2 + (y_C+1)^2 = (x_C-1)^2 + (y_C+3)^2$$

$$20 + (x_C-5)^2 + (x_C+10+1)^2 = (x_C-1)^2 + (x_C+10+3)^2$$

$$20 + (x_C-5)^2 + (x_C+11)^2 = (x_C-1)^2 + (x_C+13)^2$$

$$20 + x_C^2 - 10x_C + 25 + x_C^2 + 22x_C + 121 = x_C^2 - 2x_C + 1 + x_C^2 + 26x_C + 169$$

$$-12x_C = 4$$

$$x_C = -\frac{1}{3}$$

Zatem $x_C + 10 = -\frac{1}{3} + 10 = \frac{29}{3}$ i $C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{3}\right)$.