

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Próbny egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom podstawowy</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	5 marca 2026 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	6 marca 2026 r.

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

### Rozwiązanie

D

<sup>1</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

**Zadanie 2. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych.

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 3. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

#### Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([...] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

#### Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...]. II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: [...] $a^2 - b^2$ .

#### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia  $2501^4 - 2499^4$  do postaci  $(2501^2 - 2499^2)(2501^2 + 2499^2)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Korzystamy z własności działań na potęgach oraz ze wzoru na różnicę kwadratów i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 2501^4 - 2499^4 &= (2501^2)^2 - (2499^2)^2 = (2501^2 - 2499^2)(2501^2 + 2499^2) = \\
 &= (2501 - 2499)(2501 + 2499)(2501^2 + 2499^2) = \\
 &= 2 \cdot 5000 \cdot (2501^2 + 2499^2) = 10000 \cdot (2501^2 + 2499^2)
 \end{aligned}$$

Liczba  $2501^2 + 2499^2$  jest liczbą całkowitą, zatem liczba  $2501^4 - 2499^4$  jest podzielna przez 10 000.

### Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.4) mnoży [...] wyrażenia wymierne.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 8. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.

#### Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$

*ALBO*

– zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów, np.



1 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $x^2 + 2x - 24$ :

$$x_1 = -6 \text{ oraz } x_2 = 4.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

- Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy przedziały zapisane przez zdającego są otwarte czy domknięte.
- Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu  $x^2 + 2x - 24$ , popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, w przypadku gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający rozpatruje trójmian kwadratowy inny niż podany w zadaniu, który nie wynika z błędu przekształcenia (np.  $x^2 + 2x - 15$ ), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np.  $x^2 + 2x - 15 > 0$ ), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów i jednocześnie zapisze niewłaściwy zbiór rozwiązań (np.  $x \in (-6, 4)$  lub  $x \in (-\infty - 6] \cup [4, +\infty)$ ), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

#### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(-\infty, 4) \cup (-6, +\infty)$  lub w postaci  $(+\infty, -6) \cup (4, -\infty)$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zapisujemy nierówność w postaci  $x^2 + 2x - 24 > 0$  i obliczamy miejsca zerowe funkcji  $y = x^2 + 2x - 24$ .

Obliczamy wyróżnik trójmianu  $x^2 + 2x - 24$ :

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100$$

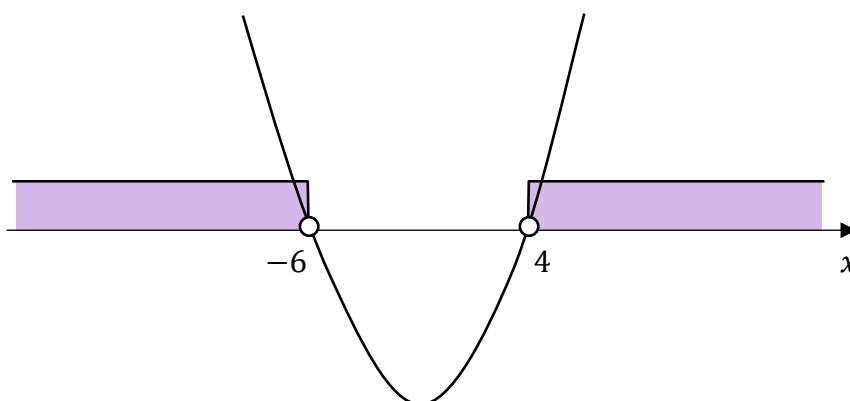
Stąd

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = -6$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = 4$$

Szkicujemy wykres funkcji  $y = x^2 + 2x - 24$ .

Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest  $(-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$ .

### Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi [...].

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

PP

### Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

FP

**Zadanie 11.1. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] przedziały monotoniczności [...].

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

FP

**Zadanie 11.2. (0–2)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów [...]; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] największe i najmniejsze wartości funkcji [...].

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

**Rozwiązanie**

1. Największa wartość funkcji  $f$  jest równa 4.

2. Równanie  $f(x) = \sqrt{5}$  ma 3 rozwiązania.

### Zadanie 11.3. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, [...] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby [...]. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego [...].

#### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch zdań.

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednego zdania.

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

#### Uwaga:

Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy zapisany przez zdającego przedział jest otwarty czy domknięty.

#### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze, że dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[3, -4]$ , to otrzymuje **1 punkt** za tak uzupełnione zdanie.

#### Rozwiązanie

1. Dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[-4, 3]$ .

2. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $f(x) < 1$  jest przedział  $(2, 3]$ .

**Zadanie 12. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: V.7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem; V.11) wykorzystuje własności funkcji [...] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $P_{ABC} = 54$ .

2 pkt – obliczenie rzędnej punktu  $C$  **oraz** obliczenie miejsc zerowych funkcji  $f$ :  $q = 36$ ,

$$x_1 = \frac{11}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{4}.$$

1 pkt – obliczenie rzędnej punktu  $C$ :  $q = 36$

*ALBO*

– obliczenie miejsc zerowych funkcji  $f$ :  $x_1 = \frac{11}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{4}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zauważmy, że trójkąt  $ABC$  jest równoramienny. Podstawą tego trójkąta jest odcinek  $AB$ , natomiast wysokością jest odcinek, którego długość jest równa rzędnej punktu  $C$ .

Obliczamy wyróżnik trójmianu  $-16x^2 + 40x + 11$ :

$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot (-16) \cdot 11 = 1600 + 704 = 2304$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji  $f$ :

$$x_1 = \frac{-40 - \sqrt{2304}}{2 \cdot (-16)} = \frac{-88}{-32} = \frac{11}{4}$$

$$x_2 = \frac{-40 + \sqrt{2304}}{2 \cdot (-16)} = \frac{8}{-32} = -\frac{1}{4}$$

Obliczamy długość podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ :

$$|AB| = \frac{11}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{4} = 3$$

Korzystamy ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli i obliczamy rzędną punktu  $C = (p, q)$ :

$$q = \frac{-2304}{4 \cdot (-16)} = \frac{-2304}{-64} = 36$$

Obliczamy pole trójkąta  $ABC$ :

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 = 54$$

### Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$ , w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi [...].

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 14. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] arytmetycznych [...] do rozwiązywania zadań [...].

#### Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $x = -3$  oraz  $x = 3$ .

2 pkt – zapisanie równania z niewiadomą  $x$ , np.:

$$\frac{4 + 3x^2 + 5}{2} = 2x^2$$

$$2x^2 - 4 = 3x^2 + 5 - 2x^2$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi  $x$  oraz  $r$ , np.

$$2x^2 = 4 + r \quad \text{oraz} \quad 3x^2 + 5 = 4 + 2r.$$

1 pkt – obliczenie piątego wyrazu ciągu  $(a_n)$ :  $a_5 = 4$ ,

ALBO

– zapisanie równania z dwiema niewiadomymi  $x$  oraz  $a_5$ , np.:

$$\frac{a_5 + 3x^2 + 5}{2} = 2x^2$$

$$2x^2 - a_5 = 3x^2 + 5 - 2x^2$$

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z niewiadomymi  $x$ ,  $r$  oraz  $a_5$ , np.

$$2x^2 = a_5 + r \quad \text{oraz} \quad 3x^2 + 5 = a_5 + 2r.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Obliczamy piąty wyraz ciągu  $(a_n)$ :

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 + 9}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4$$

Z warunków zadania wynika, że liczby  $4$ ,  $2x^2$ ,  $3x^2 + 5$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\frac{4 + 3x^2 + 5}{2} = 2x^2$$

$$3x^2 + 9 = 4x^2$$

$$x^2 = 9$$

Zatem  $x = -3$  lub  $x = 3$ .

#### Sposób II

Obliczamy piąty wyraz ciągu  $(a_n)$ :

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 + 9}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4$$

Z warunków zadania wynika, że liczby  $4$ ,  $2x^2$ ,  $3x^2 + 5$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4 + r \\ 3x^2 + 5 = 4 + 2r \end{cases}$$

gdzie  $r$  jest różnicą ciągu arytmetycznego.

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy  $r = 2x^2 - 4$  i podstawiamy w miejsce  $r$  do drugiego z równań. Stąd otrzymujemy:

$$3x^2 + 5 = 4 + 2(2x^2 - 4)$$

$$3x^2 + 5 = 4 + 4x^2 - 8$$

$$x^2 = 9$$

Zatem  $x = -3$  lub  $x = 3$ .

### Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny [...]; VI.7) wykorzystuje własności ciągów [...] arytmetycznych [...] do rozwiązywania zadań [...]; VI.5) stosuje wzór [...] na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

**Zadanie 17. (0–2)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(-\sqrt{6})$ .

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta o mierze  $\alpha$ :  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

ALBO

– obliczenie tangensa kąta o mierze  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ALBO

– przekształcenie wyrażenia  $\frac{3 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$  do postaci  $3 \cos \alpha$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i obliczamy  $\cos \alpha$ :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

Ponieważ kąt o mierze  $\alpha$  jest rozwarty, to  $\cos \alpha < 0$ . Zatem

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i obliczamy wartość wyrażenia  $\frac{3 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ :

$$\frac{3 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 \sin \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 3 \cos \alpha = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\sqrt{6}$$

### Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta prostokątnego i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych).

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt [...].

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

**Zadanie 20. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 21. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

**Zasady oceniania**

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie długości dwóch boków trójkąta  $EBC$  w zależności od jednej zmiennej (dla *sposobu I*)

ALBO

– zapisanie, że  $|CF| = a$  (dla *sposobu II*),

ALBO

– zapisanie, że  $|AM| = 2a$  (dla *sposobu III*),

ALBO

– zapisanie układu równań

$$|AC|^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 2\alpha$$

oraz

$$|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \text{ (dla } \textit{sposobu IV} \text{).}$$

1 pkt – zapisanie, że trójkąt  $ACD$  jest równoramienny.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

### Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$|CD| = a \text{ (zatem } |AB| = 2a)$$

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 2\alpha.$$

Ponieważ przekątna  $AC$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $DAB$ , to  $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$ .

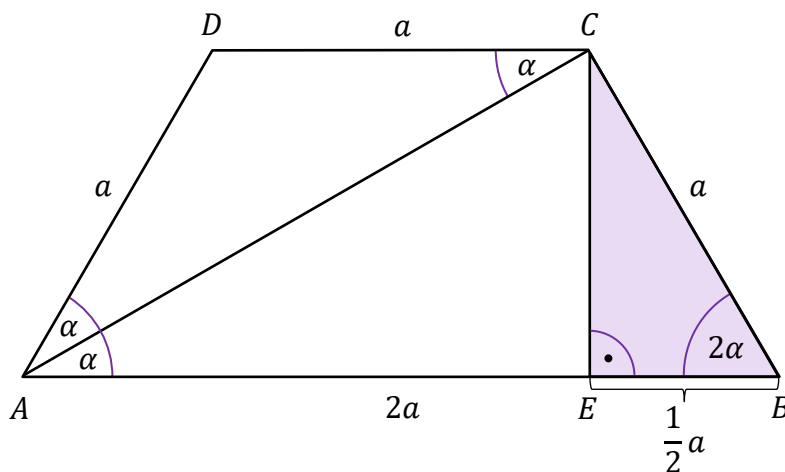
Kąty  $CAB$  i  $ACD$  są naprzemianległe oraz  $AB \parallel CD$ , zatem  $|\sphericalangle ACD| = \alpha$ .

Oznacza to, że trójkąt  $ACD$  jest równoramienny oraz  $|AD| = |CD| = a$ .

Zatem również  $|BC| = a$ .

Niech  $E$  będzie spodkiem wysokości trapezu  $ABCD$  poprowadzonej z wierzchołka  $C$  (zobacz rysunek). Z własności trapezu równoramiennego obliczamy długość odcinka  $EB$ :

$$|EB| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{1}{2}a$$



W trójkącie prostokątnym  $EBC$  mamy

$$\cos 2\alpha = \frac{|EB|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

Zatem kąt ostry  $DAB$  ma miarę równą  $60^\circ$ . To należało wykazać.

### Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$|CD| = a \text{ (zatem } |AB| = 2a)$$

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 2\alpha.$$

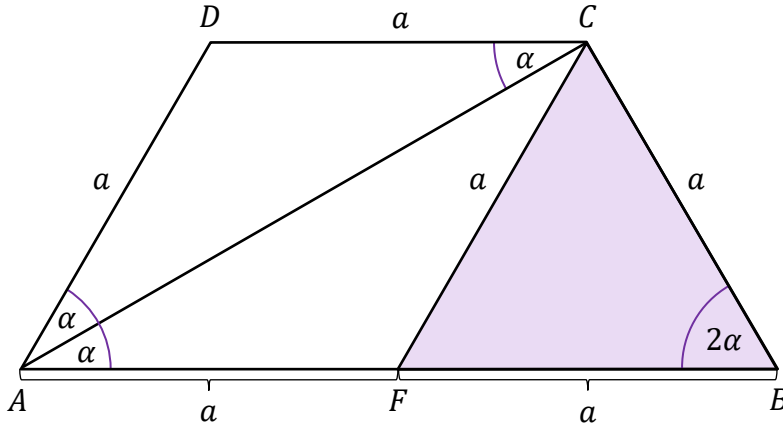
Ponieważ przekątna  $AC$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $DAB$ , to  $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$ .

Kąty  $CAB$  i  $ACD$  są naprzemianległe oraz  $AB \parallel CD$ , zatem  $|\sphericalangle ACD| = \alpha$ .

Oznacza to, że trójkąt  $ACD$  jest równoramienny oraz  $|AD| = |CD| = a$ .

Zatem również  $|BC| = a$ .

Niech  $F$  będzie takim punktem leżącym na podstawie  $AB$ , że odcinek  $FC$  jest równoległy do boku  $AD$ . Wtedy  $|FC| = |AD| = a$  oraz  $|AF| = |CD| = a$  oraz  $|FB| = 2a - a = a$  (zobacz rysunek).



Zatem trójkąt  $FBC$  jest równoboczny. Stąd wynika, że miara kąta ostrego  $DAB$  jest równa  $60^\circ$ . To należało wykazać.

### Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$|CD| = a \text{ (zatem } |AB| = 2a)$$

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 2\alpha.$$

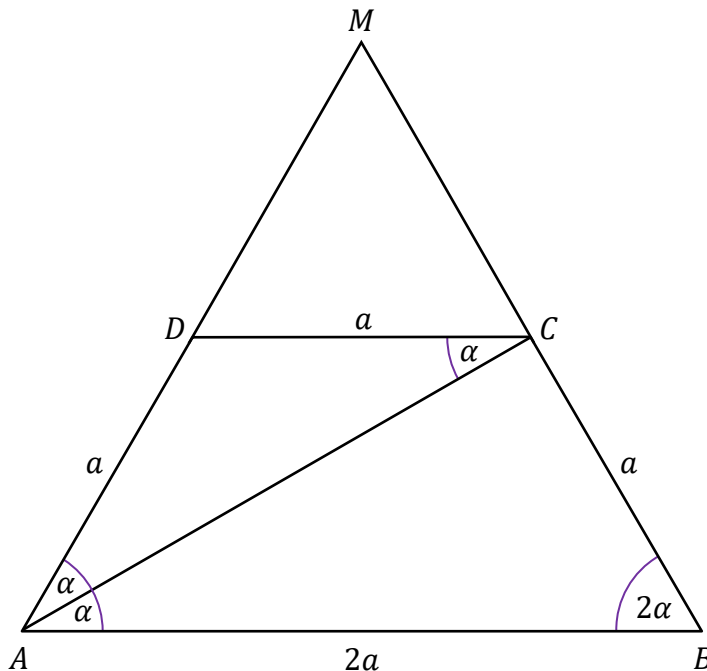
Ponieważ przekątna  $AC$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $DAB$ , to  $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$ .

Kąty  $CAB$  i  $ACD$  są naprzemianległe oraz  $AB \parallel CD$ , zatem  $|\sphericalangle ACD| = \alpha$ .

Oznacza to, że trójkąt  $ACD$  jest równoramienny oraz  $|AD| = |CD| = a$ .

Zatem również  $|BC| = a$ .

Ramiona trapezu przedłużamy do przecięcia w punkcie  $M$  (zobacz rysunek).



Trójkąt  $ABM$  jest podobny do trójkąta  $DCM$  (na podstawie cechy kąt–kąt–kąt) w skali 2.  
Zatem

$$|DM| \cdot 2 = a + |DM|$$

Stąd

$$|DM| = a$$

Zatem trójkąt  $ABM$  jest równoboczny (ponieważ  $|AM| = |BM| = |AB| = 2a$ ).

Stąd miara kąta ostrego  $DAB$  jest równa  $60^\circ$ . To należało wykazać.

#### Sposób IV

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$|CD| = a \text{ (zatem } |AB| = 2a)$$

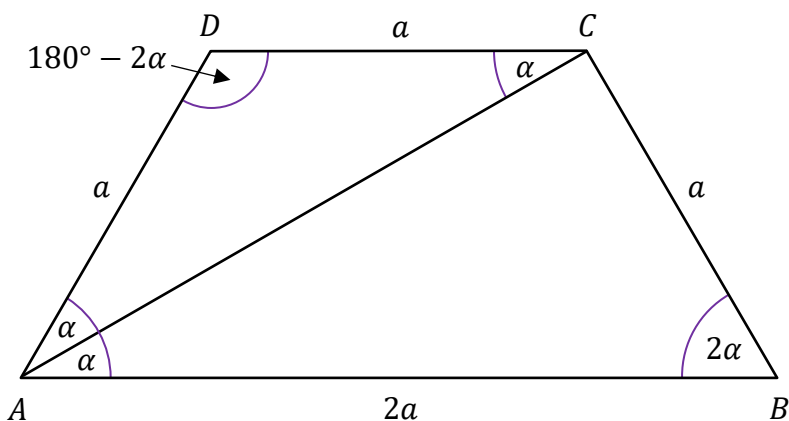
$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 2\alpha \text{ (zatem } |\sphericalangle CDA| = 180^\circ - 2\alpha).$$

Ponieważ przekątna  $AC$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $DAB$ , to  $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$ .

Kąty  $CAB$  i  $ACD$  są naprzemianległe oraz  $AB \parallel CD$ , zatem  $|\sphericalangle ACD| = \alpha$ .

Oznacza to, że trójkąt  $ACD$  jest równoramienny oraz  $|AD| = |CD| = a$ .

Zatem również  $|BC| = a$ .



Stosujemy twierdzenie cosinusów w trójkącie  $ABC$ :

$$|AC|^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 2\alpha$$

$$|AC|^2 = 5a^2 - 4a^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów w trójkącie  $ACD$ :

$$|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$$

$$|AC|^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$$

Ponieważ  $\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ , to

$$|AC|^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Z uzyskanych równań otrzymujemy:

$$5a^2 - 4a^2 \cdot \cos 2\alpha = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$6a^2 \cdot \cos 2\alpha = 3a^2$$

$$\cos 2\alpha = \frac{3a^2}{6a^2} = \frac{1}{2}$$

Zatem kąt ostry  $DAB$  ma miarę równą  $60^\circ$ . To należało wykazać.

### Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci [...] ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. [...] równoległość do innej prostej).

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

### Zadanie 24. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ; IX.5) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych [...].

#### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

3 pkt – obliczenie długości promienia (lub kwadratu długości promienia) **oraz** współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie  $A'B'C'D'$ :

$$r = 5 \text{ (lub } r^2 = 25), S' = (-1, 3)$$

ALBO

– wyznaczenie równania okręgu opisanego na kwadracie  $ABCD$ :

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A'$  oraz  $C'$  **oraz** długości promienia (lub kwadratu długości promienia) okręgu opisanego na kwadracie  $A'B'C'D'$ :

$$A' = (3, 0), C' = (-5, 6), r = 5 \text{ (lub } r^2 = 25)$$

– obliczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie  $A'B'C'D'$ :

$$S' = (-1, 3),$$

ALBO

– obliczenie długości promienia (lub kwadratu długości promienia) **oraz** współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie  $ABCD$ :

$$r = 5 \text{ (lub } r^2 = 25), S = (1, 3).$$

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A'$  oraz  $C'$ :  $A' = (3, 0)$ ,  $C' = (-5, 6)$

ALBO

– obliczenie długości promienia (lub kwadratu długości promienia) okręgu opisanego na kwadracie  $ABCD$ :  $r = 5$  (lub  $r^2 = 25$ ),

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na kwadracie  $ABCD$ :  $S = (1, 3)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Punkty  $A$  oraz  $C$  przekształcamy przez symetrię osiową względem osi  $Oy$  i otrzymujemy współrzędne punktów  $A'$  oraz  $C'$ , które są końcami przekątnej kwadratu  $A'B'C'D'$ :

$$A' = (3, 0) \quad \text{oraz} \quad C' = (-5, 6)$$

Odcinek  $A'C'$  jest średnicą okręgu  $\mathcal{O}'$  opisanego na kwadracie  $A'B'C'D'$ .

Obliczamy długość  $r$  promienia okręgu  $\mathcal{O}'$ :

$$r = \frac{1}{2} \cdot |A'C'| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-5-3)^2 + (6-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64+36} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Obliczamy współrzędne środka  $S'$  odcinka  $A'C'$ :

$$S' = \left( \frac{3-5}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (-1, 3)$$

Zapisujemy równanie okręgu  $\mathcal{O}'$ :

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

*Sposób II*

Odcinek  $AC$  jest średnicą okręgu  $\mathcal{O}$  opisanego na kwadracie  $ABCD$ .

Obliczamy długość  $r$  promienia okręgu  $\mathcal{O}$ :

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(5+3)^2 + (6-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64+36} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Obliczamy współrzędne środka  $S$  odcinka  $AC$ :

$$S = \left( \frac{-3+5}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (1, 3)$$

Zapisujemy równanie okręgu  $\mathcal{O}$ :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Okrąg  $\mathcal{O}'$  opisany na kwadracie  $A'B'C'D'$  jest obrazem okręgu  $\mathcal{O}$  w symetrii osiowej względem osi  $Oy$ . Ta symetria przekształca każdy punkt  $P = (x, y)$  leżący na okręgu  $\mathcal{O}$  na punkt  $P' = (-x, y)$  leżący na okręgu  $\mathcal{O}'$ . Zatem okrąg  $\mathcal{O}'$  jest określony równaniem:

$$(-x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Stąd

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

### Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w graniastopkach [...] kąty między odcinkami [...]. VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w [...] ostrosłupach [...] kąty między ścianami [...]; X.5) oblicza objętości [...] ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii.

#### Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $V = 96\sqrt{3}$ .

1 pkt – obliczenie/zapisanie wysokości ostrosłupa:  $H = 2\sqrt{3}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym jest kątem między wysokością ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa do krawędzi podstawy a odcinkiem łączącym spodek wysokości ostrosłupa ze środkiem tej samej krawędzi podstawy.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

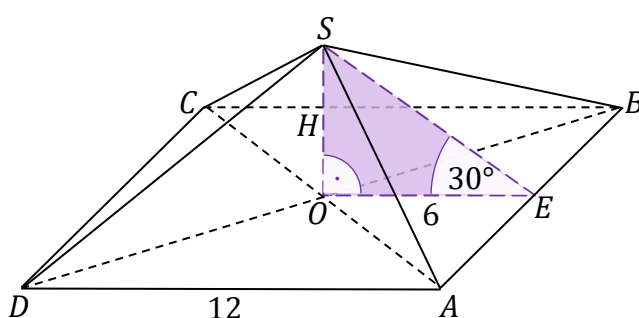
$H$  – wysokość ostrosłupa,

$O$  – spodek wysokości ostrosłupa,

$E$  – środek krawędzi  $AB$ .

Zauważamy, że  $H > 0$ .

Ponieważ  $O$  jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, to  $|OE| = 6$ .



W trójkącie prostokątnym  $SOE$  mamy

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{H}{6}$$

Zatem

$$H = 6 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość  $V$  ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 2\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

### Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.9) wykorzystuje zależności [...] między polami figur podobnych. X.6) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

### Rozwiązanie

PP

### Zadanie 28. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

**Zadanie 30. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza [...] średnią ważoną [...].

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 31. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.2) [...] znajduje medianę [...].

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

### Zadanie 32.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.10) wyznacza największą [...] wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 32.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.10) wyznacza [...] najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A